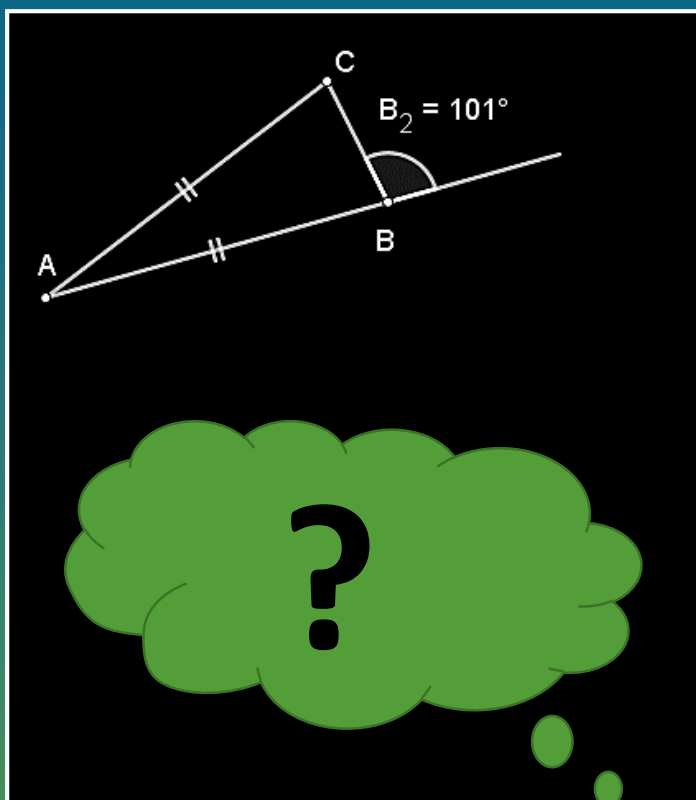




Uitgewerkte wiskunde

Hoe leerlingen te bewegen tot het volledig opschrijven van uitwerkingen bij wiskunde
ARNAUD A. JASPERSE

Colofon

UITGEWERKTE WISKUNDE

HOE LEERLINGEN TE BEWEGEN TOT HET VOLLEDIG OPSCHRIJVEN VAN UITWERKINGEN BIJ WISKUNDE

Copyright © 2018

Arnaud A. Jasperse

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Auteur:

Arnaud Jasperse

Grotius College

Locatie Juniusstraat 8 voor MAVO, HAVO, Atheneum, Gymnasium, Tweetalig VWO, Vrije School, en KOP-klas
Juniusstraat 8
2625 XZ Delft
015 - 8 000 000

Hogeschool Rotterdam - IvL

Lerarenopleiding Wiskunde, Deeltijd

Correctie:

Job Rauch, MSc

Omslagontwerp:

Arnaud Jasperse

Druk:

Xerox – PDC Hogeschool Rotterdam

Eerste druk:

Juni 2018, Rotterdam

Uitgave:

Jasperse
a.jasperse@grotiuscollege.nl
06-15372101

VOORWOORD

Voor u ligt de scriptie “Uitgewerkte Wiskunde”. Deze scriptie is geschreven in het kader van mijn afstuderen aan de Lerarenopleiding Wiskunde van de Hogeschool Rotterdam en in opdracht van het Grotius College in Delft.

In 2013 ben ik begonnen aan de opleiding en sinds 2015 sta ik ook voor de klas. Ik heb veel ervaring opgedaan in de jaren dat ik lesgeef. Er bleef echter altijd een probleem aan mij knagen, en dat heb ik in mei 2017 als onderwerp gekozen voor mijn afstudeeronderzoek.

In wil in het bijzonder Job Rauch, mijn afstudeerbegeleider tijdens dit gehele onderzoek, bedanken. Hetzelfde geldt voor docenten Ton Meulman, Gerlof Veenma, Roelof van den Berg, Niek van den Bogert en Marc de Graaf, en collega’s Karg van Boltaringen, Rick Frijns, Nico Duivenvoorden, Katja van Boxel, Janneke Kluwen en Wesley van Oort-Strang. Zonder de heldere en kritische noten van deze mensen was ik nooit tot dit mooie resultaat gekomen.

Mensen die ik verder wil bedanken zijn Sander Wiese, Layla Boughardain, Carolien Ebels, Matthijs Klapwijk, Mark Nipius en René Wouters, klasgenoten en partners om mee te sparren over vrijwel elk aspect van de opleiding. Mijn familie Hanneke, René en Reinier Jasperse die met een luisterend oor of een warme maaltijd mij op de been wisten te houden. Zo ook mijn vrienden Alco Engelen en Erwin Kerp die de afgelopen jaren wat meer geduld met mij moesten hebben dan anders.

Ik wil natuurlijk ook de docenten en contactpersonen binnen de scholen bedanken die voor mij een aanspreekpunt waren, en mij waar nodig bijstonden met raad en daad. Zo ook wil ik de leerlingen bedanken voor hun medewerking aan het tot stand komen van dit onderzoek.

Ik wens u veel leesplezier toe.

Arnaud Jasperse
Delft, juni 2018

INHOUDSOPGAVE

Voorwoord.....	2
Inhoudsopgave	3
Samenvatting.....	5
Kernbegrippen	6
Inleiding	7
Inleiding	7
Aanleiding	7
Context	8
Onderzoeksorganisatie	8
Aansluiting in de school	8
Het praktijkprobleem	9
Resultaten literatuurverkenning.....	9
Nul-meting	9
Reacties van collega's	9
Uit de literatuur	9
Het praktijkprobleem	10
Onderzoeksdoel, onderzoeksvraag en de literatuurstudie	12
Het onderzoeksdoel.....	12
Theoretisch en Praktisch kader	12
Het belang van de uitwerkingen	12
De wiskundige taal.....	13
De motivatie van leerlingen.....	14
Conclusie.....	15
De onderzoeksvraag	16
Ontwerpeisen	16
Het ontwerp	17
Het verloop van het onderzoek	17
Het ontwerp in detail.....	18
Aanpassing programma Hoofdstuk 3 – Getal & Ruimte HAVO/VWO jaar 1	18
Toelichting en Verantwoording voldoening aan ontwerpeisen	20
Populatie.....	20
Feedback van collega's	21
Verantwoording betrouwbaarheid en validiteit	21
Meetinstrumenten	22
De GeoGebra opdrachten.....	22

De eerste toets	22
De tweede toets	23
Het Focusgroep interview.....	24
Vragen Groep 1.....	24
Vragen Groep 2.....	24
Vragen Groep 3.....	24
Rapportage en Data-analyse	26
De GeoGebra opdrachten.....	26
De eerste toets	26
De tweede toets	26
In overzicht	26
Het Focusgroep interview.....	27
Conclusie, Discussie en Aanbevelingen	29
Conclusie.....	29
Het belang van de uitwerkingen.....	29
De motivatie van leerlingen.....	29
De wiskundige taal.....	30
Eindoordeel	30
Beperkingen.....	30
Discussie	31
Vervolgonderzoek.....	31
Verdere inzichten	31
Aanbevelingen	32
Bijlage 1 – De verwachte antwoorden bij het focusgroep interview	33
Leerlingen die in Groep 1 eindigen.....	33
Leerlingen die in Groep 2 eindigen.....	33
Leerlingen die in Groep 3 eindigen.....	34
Bijlage 2 – De gegeven antwoorden bij het focusgroep interview	36
Leerlingen die in Groep 1 zijn geëindigd	36
Leerlingen die in Groep 2 zijn geëindigd	38
Leerlingen die in Groep 3 zijn geëindigd	39
Bijlage 3 – De GeoGebra documenten	40
Deel 1: GeoGebra – Een introductie voor de Brugklas (Opdracht 1).....	40
Deel 5: GeoGebra Opdracht 1 – Het Construeren van een Gelijkbenige Driehoek.....	44
Deel 6: GeoGebra Opdracht 2 – Het Reconstrueren van een Opgave	49
Bibliografie.....	51

SAMENVATTING

Wiskunde is een vak waar beginnelingen, in het geval van dit onderzoek zijn het leerlingen, maar moeilijk vat op krijgen. Het idee dat het een verzameling gereedschappen is komt bij velen niet binnen. Dat het op toetsen en tijdens het huiswerk niet zo zeer om antwoorden gaat, maar om te laten zien dat je deze gereedschappen correct kan gebruiken al helemaal niet. De notie dat er ook met een wiskundige taal gecommuniceerd kan worden is dan heel ver weg.

Het doel van dit onderzoek is om een didactisch middel te ontwerpen dat dit probleem al in het beginstadium weet te ondervangen. Het gekozen moment is dan ook het eerste hoofdstuk waarbij leerlingen in aanraking komen met uitgebreide uitwerkingen in de vorm van een wiskundige beredenering. Binnen de meetkunde wordt op de middelbare school nog wel eens een wiskundig bewijs verwacht, en dit hoofdstuk vormt daar de basis voor.

Om dit model te bewerkstelligen is de volgende onderzoeksvraag gesteld: *“Hoe kunnen leerlingen uit VWO 1 bewogen worden ook op lange termijn nog steeds bewust zijn van het feit dat het opschrijven van berekeningen bij wiskunde het aanleren van een nieuwe taal is, en daarmee in staat gesteld worden hun uitwerkingen te kunnen analyseren om onnodig puntverlies, veroorzaakt door onjuiste, on-wiskundige, of onvolledige uitwerkingen, te voorkomen?”*

In dit onderzoek is een VWO brugklas bestaande uit leerlingen met een HAVO/VWO en VWO advies op het Grotius College. Onderzocht is de effectiviteit van het ontworpen didactisch middel. Dit middel is tot stand gekomen na grondig literatuuronderzoek, herhaalde feedback van collega's en input van docenten wiskunde uit het samenwerkingsverband. Het ontwerp is een aanpassing van de staart van het betreffende hoofdstuk door vragen anders vorm te geven, en een tweetal opdrachten die in GeoGebra, met herhaaldelijke feedback, gemaakt moesten worden.

Om antwoord te krijgen op de onderzoeksvraag zijn twee toetsen ontwikkeld die de effectiviteit op korte en lange termijn hebben gemeten. Om opheldering te krijgen is daarna een focusgroep interview gehouden met groepen die zijn ingedeeld op basis van de toetsresultaten.

Hieruit blijkt dat intensief aandacht besteden aan het belang van uitwerkingen, door o.a. leerlingen kennis te laten maken met de vraag-uitwerking-antwoord structuur, daar telkens één deel van de drie weg te laten, en herhaaldelijk feedback op complexe opdrachten te geven, veel bereikt kan worden. Leerlingen zijn waarde gaan hechten aan van het belang van uitwerkingen, en, hoewel de bewustwording van de wiskundige taal nog achter blijft, zij ontwikkelden de kennis van deze taal op het verwachte niveau.

Op basis hiervan wordt aanbevolen het gehele ontwerp in te zetten en de ICT mogelijkheden volledig te benutten in de vorm van GeoGebra in combinatie met een elektronische leeromgeving. Eventueel vervolgonderzoek zal moeten uitwijzen of dit, al dan niet met andere ICT applicaties, ook effectief en haalbaar is bij andere takken van de wiskunde zoals Algebra of Statistiek.

KERNBEGRIPPEN

Om dit onderzoek accuraat te beschrijven is het wenselijk om van bepaalde gebruikte termen de betekenis helder te definiëren.

Begrip Omschrijving Bron:
GeoGebra GeoGebra is een dynamisch wiskundig open-source softwareprogramma voor elk onderwijsniveau dat meetkunde, algebra, rekenblad, grafieken, statistiek en analyse calculus combineert in één gebruiksvriendelijk pakket. Bron: www.geogebra.org
21st Century Skills 21st century skills is een verzamelterm voor een aantal algemene competenties die belangrijk zijn in de huidige kennis- en netwerksamenleving. Bron: www.kennisnet.nl
Breien Wanneer in het rekenen en wiskunde lange berekeningen aan elkaar geregen worden (in plaats van onder elkaar), waar ook de berekeningen niet kloppen omdat er links en rechts van het = teken niet hetzelfde staat. Bron: https://nl.wikipedia.org/wiki/Breien_(wiskunde)
Opgave De vraag- of probleemstelling in rekenen en wiskunde. Bron: eigen definitie
Uitwerking De logische (reken)stappen die nodig zijn om bij het goede antwoord te komen. Bron: eigen definitie
Antwoord De conclusie die getrokken kan worden als gevolg van de logische (reken)stappen. In het antwoord wordt bij verhaaltjessommen vaak een deel van de vraag herhaald. Bron: eigen definitie

INLEIDING

INLEIDING

Wiskunde is zo'n vak dat bij sommigen het angstzweet doet uitbreken. Als leraar krijg ik dan ook vaak klachten dat het een verwarrend en moeilijk vak is. Wiskunde zou over getallen moeten gaan, maar het gaat over figuren, letters en nog meer van die rare tekens. Een uitspraak die nogal eens de revue passeert is: "Het lijkt wel alsof we Chinees aan het schrijven zijn!"

Leerlingen bedoelen natuurlijk dat de geschreven wiskunde voor hen onbegrijpelijk is, maar in feite is wiskunde natuurlijk een vreemde taal. Het is een andere, en voor velen ook een nieuwe taal. Een taal die gebruikt wordt om te beschrijven wat er in de wereld om ons heen gebeurt. En toch wordt de wiskunde vrijwel nooit op deze manier ingezet.

Kijk maar wat er gebeurt als je bijvoorbeeld Duits probeert te leren. Natuurlijk kan je heel veel woorden uit je hoofd leren, maar ga je daardoor de taal beter gebruiken? Zomaar woorden leren laat je nog geen correcte zinnen schrijven, laat staan dat aspecten als de naamvallen en grammatica wel goed uit de verf komen. Als je op deze manier met een nieuwe taal omgaat, is de kans groot dat je veel weet te onthouden, maar dat je er eigenlijk nog maar weinig van gaat begrijpen.

En zo is het ook met wiskunde. Je zal door uit je hoofd te leren veel weten te onthouden, maar de wiskunde ook echt begrijpen en goed doorzien zal op deze manier nooit gebeuren. Verder dan wat basisprocedures en simpele trucjes ontwikkelt het inzicht in de wiskunde zich niet.

Om een idee te geven wat er nou precies bedoeld wordt met de wiskundige taal halen we de kosten van een nieuwe telefoon er als voorbeeld bij:

- In het Nederlands: "De telefoon kost 300 euro bij aanschaf en daar komt nog eens 27 euro per maand bij aan abonnementskosten."
- In het Engels: "The phone will cost 300 euro and another 27 euro each month for subscriptions."
- In het Duits: "Die Anschaffungskosten für das Telefon sind 300 Euro und danach kommen noch 27 Euro Abonnementskosten pro Monat dazu."
- In het Frans: Le prix de l'appareil téléphone est 300 euro, plus un abonnement mensuel de 27 euro.
- En als laatst in het wiskundigs: $\text{€} = 300 + 27t$ | € = totale kosten, t in maanden.

Alle uitspraken beschrijven hetzelfde. Alle vijf leggen zij de relatie uit tussen het aantal maanden dat de telefoon gebruikt wordt en de totale kosten. Een simpele lineaire vergelijking is dus gewoon een andere manier om de telefoonkosten te beschrijven, maar omdat het op een manier geschreven staat die je in je dagelijks leven niet tegen komt blijft het moeilijk om je thuis te voelen met de wiskundige taal.

Een taal valt pas echt te begrijpen als je jezelf er helemaal in onderdompelt en geldt ook voor de wiskundige taal zijn. Wanneer je deze gesproken hoort en geschreven ziet in een betekenisvolle context zal je eerder de wiskundige "grammatica" begrijpen en zelf gaan gebruiken.

AANLEIDING

Wiskunde als een taal zien gebeurt nog te weinig. Leerlingen leren de wiskunde nog te veel in het Nederlands, en te weinig in het wiskundigs. Een gebrek aan onderdompeling in de taal van de wiskunde kan zorgen voor een achterstand in het begrijpend lezen van de wiskunde; een vaardigheid die aan de basis staat van het wiskundige schrijven.

In dit onderzoek neemt het wiskundige schrijven de vorm aan van uitwerkingen die door veel leerlingen nog wel eens achterwege gelaten worden. Hierdoor wordt, omdat er natuurlijk niets met uitwerkingen gedaan kan worden die er niet zijn, het puntverlies op toetsvragen waar een fout antwoord staat verergerd. Daarbij komt ook dat het kritisch reflecteren op gemaakt werk vrijwel onmogelijk wordt omdat de denkstappen onzichtbaar zijn. Omdat wiskunde bij uitstek een vak is waar probleemoplossend gewerkt moet worden, en bij probleemoplossend werken het reflecteren op de gebruikte werkwijzen cruciaal is, wordt het leerrendement negatief beïnvloed.

Zelf kwam ik dit knelpunt tegen in verschillende klassen van verschillende jaren, zelfs in het vierde jaar van het VWO. Structureel zag ik dat het uitwerken van opgaven achterwege bleef. Hierdoor was moeilijk te achterhalen waar de fouten gemaakt werden, want vaak waren de dan gegeven antwoorden ook incorrect. Ik kon op dat moment mijn leerlingen niet verder helpen omdat het voor hen en voor mij niet inzichtelijk was wat de gemaakte denkstappen waren. Het vroegste stadium waarin het probleem werd waargenomen is het logisch redeneren bij het berekenen van hoeken – het 3^e hoofdstuk in het eerste jaar van de HAVO en VWO.

Dit onderzoek tracht te achterhalen waar en waarom dit gebeurt, en probeert in dit vroegste stadium al oplossingen aan te reiken.

CONTEXT

Het onderzoek zal worden uitgevoerd op een enkele school. Het Grotius College in Delft (Locatie Juniusstraat 8) is een openbare school. Ik geef daar sinds drie jaar les, maar heb er een jaar daarvoor ook stage gelopen.

Op het Grotius College zijn de leerniveaus VMBO TL, HAVO, VWO (Gymnasium en Atheneum) en TTO (Tweetalig VWO) aanwezig. Er zitten hier echter meer leerlingen op het VWO dan op het HAVO of VMBO. Ook is drie jaar geleden begonnen met een Vrije School afdeling. Er zijn hier nu drie brugklassen, drie 2^ejaars klassen en twee klassen van het derde leerjaar van de VSA. Ook is er begonnen met een nieuw soort VWO (het Grotius-VWO) waar leerlingen een dag minder lessen hebben. De onderwijstijd wordt aangevuld met workshops en excursies buiten de deur. Het totaal aantal leerlingen op het Grotius College bedraagt ongeveer 1100.

De klassen die worden meegenomen in dit onderzoek zijn alle reguliere VWO, GWO en TTO klassen van het eerste jaar van de HAVO en VWO afdelingen. Uiteindelijke ontwerpen zullen in een GWO klas getest worden.

ONDERZOEKSORGANISATIE

Opdrachtgever voor het onderzoek is het Grotius College. Het onderzoek zal voornamelijk plaatsvinden binnen de muren van de school, bij de leerlingen thuis en via het internet in de vorm van de elektronische leeromgeving.

Paul Meulemans fungeert als contactpersoon en begeleider op deze school. In totaal zullen de meningen, eisen en feedback van alle collega docenten wiskunde van deze school en scholen in het samenwerkingsverband meegenomen worden in het uiteindelijk ontwerp. Dit ontwerp zal in een klas getoetst en (ook weer door de collega's) geëvalueerd worden.

AANSLUITING IN DE SCHOOL

De resultaten van dit onderzoek zullen nuttig blijken voor elke wiskunde docent. Wanneer zij met leerlingen in de wiskundige taal kunnen communiceren worden de leerlingen vaker blootgesteld aan het correct noteren van wiskunde, ook op de toetsen.

De leerlingen hebben hier dan het meest profijt van, omdat er wanneer zij door onjuiste notatie geen onnodig foute of onvolledige antwoorden geven op de toetsen ook geen puntaftrek incasseren.

Verder zal door vollediger notatie van bijvoorbeeld uitwerkingen beter inzicht gekregen worden waar de fouten gemaakt worden. Met de juiste begeleiding bevordert dit het leerrendement.

HET PRAKTIJKPROBLEEM

RESULTATEN LITERATUURVERKENNING

Om het probleem goed te doorgronden is gekeken naar literatuur en resultaten uit het verleden. Daarnaast zijn de meningen van mijn collega docenten wiskunde geraadpleegd.

NUL-METING

Er is gekeken naar de repetities van het 3^e hoofdstuk uit Getal & Ruimte (10^e editie) die vorig jaar gemaakt zijn. Dit hoofdstuk is het eerste waar het geven van uitleg en berekeningen als standaard gevraagd wordt en waar bij gebrek aan deze stappen puntverlies optreedt.

Uit de toetsen van 74 leerlingen van vorig jaar van alle reguliere (niet VSA of TTO) HAVO en VWO brugklassen hebben er 58 een berekening opgeschreven, waarvan 40 ook een argumentatie gaven bij deze berekeningen. Wanneer goede antwoorden gegeven werden kon 1 van de 3 punten verdiend worden, bij alleen een berekening 2 punten en met een toegevoegde argumentatie werden alle punten verdiend. De verhoudingen tussen het aantal leerlingen dat wel de uitwerkingen opschrijft tegenover degene die dat niet doen is in alle drie de klassen ongeveer gelijk.

REACTIES VAN COLLEGA'S

Bijna alle docenten wiskunde op de locatie zijn informeel doch intensief uitgehoord nadat het probleem hun werd voorgeschoteld. Niet iedereen was zich bewust van het probleem, maar na aankaarten gaf een aantal collega's aan het probleem wel te herkennen. Het gebrek aan uitwerkingen doortrekken naar gebrekkige foutanalyse werd slechts door een enkeling doorzien.

Men ziet tijdens de brugjaren op alle niveaus (MAVO, HAVO, VWO, en ook op de Vrijeschool Afdeling) het gebrek aan uitwerkingen steeds verder toenemen en dit meer dan eens in onvoldoendes resulteren. In het derde leerjaar, vooral in HAVO en VWO, weegt het nog wel eens mee de beslissing tussen Wiskunde A of B. In sommige gevallen kan het zelfs afstroom naar de MAVO betekenen.

In de bovenbouw van HAVO en VWO zeggen de collega's ook dat er door gebrekkige notatie slechter gescoord wordt op toetsen. Dit is slechts zelden zo ernstig dat examens niet gehaald worden, maar het gemiddelde lijdt er duidelijk onder. Op de MAVO is het kiezen van de juiste strategie belangrijker dan de volledigheid van de uitwerkingen. Zo wordt "breien" op het eindexamen niet bestraft.

Een tweede vraagronde, dit keer met de focus op het analyseren van gemaakte fouten in uitwerkingen, leverde in ieder geval de uitgesproken ambitie op om meer te gaan doen met "leren leren van je fouten".

Het belang van notatie en de volledigheid van uitwerkingen wordt door de collega's sterk onderschreven. Ook de bereidheid tot vervolgstappen, bijvoorbeeld in de vorm van het aanleren van foutanalyses, wordt aangegeven.

UIT DE LITERATUUR

Ballering (2011) onderschrijft het belang om bij leerlingen goede gewoonten aan te leren. Een van deze gewoonten is het kunnen abstraheren. Hiermee bedoelt hij dat vragen over concrete situaties moeten kunnen worden vertaald naar bijvoorbeeld een op te lossen vergelijking.

Leerlingen ervaren bij het correct noteren van uitwerkingen problemen op een aantal gebieden. Deze variëren van bijvoorbeeld het niet inzien dat een breuk-notatie zoals $\frac{2}{5}$ ook een deling van teller op noemer is. Het gaat hier om zowel een object als een bewerking; de proces-object dualiteit.

Ook het vast blijven zitten in dat wat tot nu toe is aangeleerd i.p.v. het omschakelen naar nieuwe modellen levert problemen op. Dit komt ook met nieuwe stof voor wanneer leerlingen vaste schema's of stappenplannen volgen en niet kijken naar het op te lossen probleem. Verder raken leerlingen, vooral in complexere opgaven nog wel eens het spoor bijster en weten ze niet meer wat ze aan het doen zijn, een

gevolg van de hiervoor genoemde starheid (Drijvers & Kop, 2008; Faarts, Goris, Konings, Monquil, & Koelemeijer, 2012).

Uit eigen ervaring weet ik dat de vraag “Waarom moet ik dit allemaal opschrijven?” geregeld de kop opsteekt. Maar voor leerlingen zijn de door de docent gegeven redeneringen niet afdoende.

Handreikingen om docenten het probleem van de missende uitwerkingen te doen inzien zijn er genoeg. Maar oplossingen om leerlingen verder te helpen met het aanleren van het blijvend gestructureerd opschrijven en analyseren van uitwerkingen zijn schaars.

HET PRAKTIJKPROBLEEM

Het wiskundig taalgebruik, in de vorm van uitwerkingen, wordt bij te veel leerlingen van het Grotius College niet goed eigen gemaakt. Hoewel leerlingen vaak de wiskunde wel begrijpen komt dit niet terug in toetsen. Dit wordt zichtbaar wanneer er op een wiskundige manier antwoorden opgeschreven moeten worden.

Waar twee of meer mensen eenzelfde taal niet spreken is dit een recept voor moeilijkheden. Miscommunicatie, misbegrip, en natuurlijk ook het gebrek aan structuur in de wiskundige uitwerkingen op papier zijn hier een gevolg van. Ook wordt het lastiger voor docenten om door gebrekkige uitwerkingen te zien waar het (wiskundig) denkproces bij leerlingen nog niet op orde is.

Het probleem ontstaat zo al in de lessen. Bepaalde wiskundige manieren om iets te duiden zullen niet altijd worden begrepen door leerlingen. Docenten zullen hierdoor extra tijd kwijt zijn, en door dingen op een minder wiskundige manier uit te moeten leggen wordt het wiskundig noteren geen gewoonte bij leerlingen. Dit zorgt daarop weer voor problemen omdat leerlingen alsnog niet op de wiskundige manier aan de slag gaan met huiswerk. Leerlingen komen op deze manier weg met niet-wiskundig taalgebruik.

Dus wanneer er in het huiswerk of op een toets niet op de juiste manier geantwoord is kan er een onnodige vermindering in punten hebben plaatsgevonden waardoor er een lager resultaat gehaald wordt. Er kan dan ook niet achterhaald worden waar het mis is gegaan. Dit bemoeilijkt de docent in zijn werk om de leerling gericht te kunnen helpen omdat er maar moeilijk kan worden ingespeeld op de leerbehoeften.

Leerlingen krijgen ook hun eindoordeel over deze gemaakte toetsen. Dit valt dan lager uit waardoor het cijfer niet correspondeert met het niveau van de leerling.

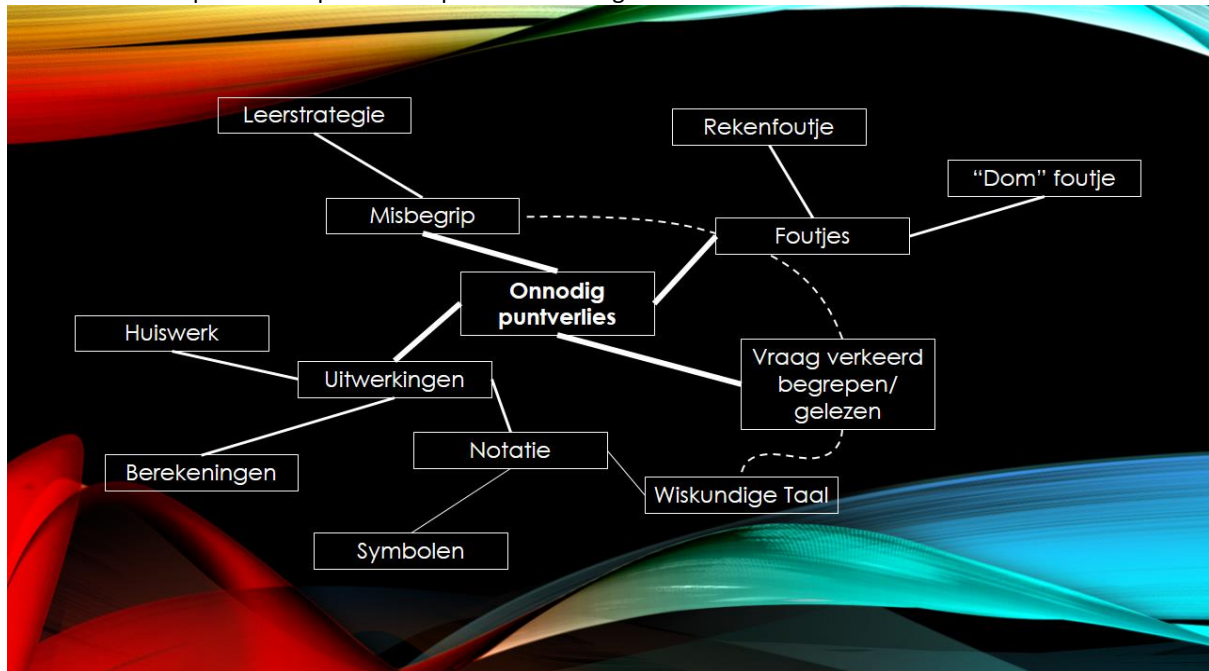
Dus wanneer leerlingen in de brugklas tijdens de lessen al niet (laten) aanleren dat altijd op een vaste manier een vraag beantwoordt moet worden, is de motivatie dit wel op toetsen te doen natuurlijk gering. Dit is dus een probleem wat in de lessen zelf en met het huiswerk opgelost moet worden op een manier dat ook de motivatie van leerlingen om dit in de toekomst te blijven doen hoog gehouden wordt.

Dit is voornamelijk een probleem van leerlingen, en dan met name de HAVO en VWO stroom. Leerlingen horen bij wiskunde niet alleen de conceptuele kennis op te doen, maar ook wiskundig te leren lezen, schrijven en spreken.

Het is ook een praktisch probleem voor docenten die lesgeven aan deze leerlingen in de jaren die erop volgen. Deze willen er vanuit kunnen gaan dat er, bijvoorbeeld bij een aansluitend hoofdstuk, en zeker aan het begin van het jaar, bekend is bij leerlingen hoe zij met het wiskundig taalgebruik om moeten gaan. Hoewel dit door de docent kan worden ondervangen, is het voor de leerling beter om dit probleem te voorkomen. Wanneer docenten consistent het wiskundig taalgebruik hanteren en dit van de leerlingen verwachten kan er de gehele schoolcarrière door docenten zonder moeilijkheden aan gerefereerd worden. Deze vastigheid in het leren van wiskunde wordt ook op andere vlakken aangeraden (Faes, et al., 2001).

Er zijn veel oorzaken aan te wijzen. Een van de oorzaken is het niet controleren en corrigeren van het huiswerk. Ook het niet afstraffen van on-wiskundig taalgebruik in toetsen, of het gebrek aan het leggen van de nadruk op uitwerkingen tijdens de uitleg in de lessen kan er ten grondslag aan liggen. Als laatste is een tekort aan (en het gebruik van) voorbeelden van correct geschreven uitwerkingen aan te wijzen als oorzaak.

Uit deze Mindmap komt het proces van probleemvinding visueel naar voren.



Het praktijkprobleem valt nu in drie lagen te splitsen:

- Het wiskundig taalgebruik van leerlingen, wat ten grondslag ligt aan...
- Gebrekkige uitwerkingen en hierdoor het uitblijven van foutanalyses
- De motivatie van leerlingen om structureel hiermee te blijven werken

ONDERZOEKSDOEL, ONDERZOEKSVRAAG EN DE LITERATUURSTUDIE

HET ONDERZOEKSDOEL

Het doel van het onderzoek is om een middel, passend bij het 3^e hoofdstuk (hoeken meten, tekenen, en berekenen) van de 10^e editie van Getal & Ruimte voor HAVO en VWO 1, te ontwikkelen, te testen, en te evalueren. Dit middel moet leerlingen na implementatie in staat stellen om bij het maken van huiswerk en toetsen de gegeven uitwerkingen en antwoorden vollediger en wiskundiger te noteren.

Door bekwaam te zijn in het wiskundig en volledig weergeven van uitwerkingen moeten zij ook in staat worden gebracht deze te analyseren.

De motivatie van leerlingen om intensiever met uitwerkingen aan de slag te gaan, ook op lange termijn, moet worden verhoogd.

THEORETISCH EN PRAKTISCH KADER

Om het probleem en mogelijke oplossingen te kaderen zijn er verschillende benaderingen geweest. Het probleem is bekeken vanuit de drie belangrijkste aspecten:

- Het belang van de uitwerkingen
- De wiskundige taal
- De motivatie van de leerlingen, met name op lange termijn

HET BELANG VAN DE UITWERKINGEN

Leerlingen zien het belang van uitwerkingen niet in, en gaan liever gelijk over tot het antwoord. Hier worden cruciale leerdoelen, waar zij uiteindelijk ook op worden getoetst, overgeslagen. Er is, naast het raadplegen van de literatuur, aan collega's van de contextschool en daarbuiten gevraagd om input.

TERUG NAAR DE COLLEGA'S

Wanneer het probleem betreffende uitwerkingen verhelderd werd bij de collega-docenten binnen de school kwamen een aantal bekende thema's terug in het gegeven commentaar:

- Leg uit waarom je een stap zet
- Vertel waarom je deze stap ook opschrijft
- Laat leerlingen inzien waarom die stap belangrijk is, door bijvoorbeeld medeleerlingen er fouten uit te laten halen.

ANDERE WISKUNDEDOCENTEN INSCHAKELEN

Aangezien de feedback van directe collega's nog niet tot mogelijke oplossingen konden leiden, is het forum ingeschakeld waarop ons samenwerkingsverband communiceert. Dit samenwerkingsverband zijn drie scholen in de omgeving (Den Haag en Zoetermeer) en - vanwege het internationaliserende karakter van het Grotius College - de Norwood Public Schools in Boston.

In die reacties werd het volgende aangeraden:

- Zorg voor complexere opgaven. Wanneer leerlingen moeilijkere opgaven krijgen wordt het vanzelf niet meer mogelijk om alles uit het hoofd te doen.
- Neem huiswerk in, kijk het na, en geef het terug met feedback. Dit kost veel tijd, maar heeft wel effect wanneer het de leerlingen duidelijk wordt wat van hen verwacht wordt.
- Geef opgaven inclusief de uitwerkingen. Zorg wel dat er een fout in die uitwerking zit, en laat de leerling deze er uit halen.
- Laat leerlingen een antwoord checken door de berekeningen op te schrijven.

UIT DE LITERATUUR

Leerlingen vinden het antwoord op een gegeven vraag vaak veel belangrijker dan de uitwerkingen. Dit is niet iets unieks voor wiskunde. In heel veel vakken komt dit voor en heeft als oorzaak dat aan leerlingen nooit andere vragen gesteld worden. Wanneer in elke vraag in het huiswerk en in de toetsen een goed antwoord vereist is, en veel minder belang wordt gehecht aan de argumentatie, dan zal de leerling daar ook geen waarde

aan hechten. Hierdoor ontwikkelt de leerling zich tot een zwart-wit denkende leerling, die niet nadenkt over nuances of processen (Visser, 2014).

Wiskundige denkactiviteiten gaan over het hoe en waarom en vereisen meerdere denkstappen (Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek, 2015). Maar bovenal moeten goede wiskundige denkactiviteiten zich kunnen lenen voor het opstellen van de aanpak van een probleem. Deze aanpak moet kunnen worden uitgevoerd. Er moet op de uitvoering kunnen worden gereflecteerd om te zien of deze de juiste was. En in het geval dat dit niet zo is, moet de uitvoering kunnen worden bijgesteld (van den Bogaart & Konings, 2015).

Wanneer de leerling in het oplossen van een bepaald probleem vastloopt in de uitwerking, zal er gekeken moeten worden naar de probleemcontext (Het PO-VO Netwerk in Alkmaar, 2015). Gemaakte uitwerkingen goed kunnen analyseren, zowel als foutanalyse als om in te zien wat er voor bewerkingen zijn gedaan (en waarom) valt onder probleemoplossend handelen, specifiek het modelleren en algebraïseren (van Streun, 2014).

In “De kunst van het weglaten” (Keijzer & van Galen, 2014) wordt gekeken naar de effectiviteit van het weglaten van stukjes uit de opgave, door bijvoorbeeld de labels of schaalverdeling van de assen weg te laten. Wanneer dan de uitwerking van de opgave gegeven wordt forceert het de leerling deze uitwerking uit te pluizen om de opgave zelf weer te reconstrueren.

Dit betreft grafieken op de basisschool, maar het concept van het weglaten van stukken van de vraag die a.d.h.v. uitwerkingen gereconstrueerd moeten worden kan worden geëxtrapoleerd naar vrijwel alle wiskundige meetkunde en algebra.

DE WISKUNDIGE TAAL

Dit aspect betreft het achterblijven van de wiskundige taalvaardigheid. Ook hier zijn, naast diverse literatuurbronnen, collega docenten geraadpleegd.

TERUG NAAR DE COLLEGA'S

Van collega-docenten binnen de school kreeg ik over het bevorderen van de wiskundige taalvaardigheid de volgende adviezen:

- Zorg altijd dat je leerlingen corrigeert die begrippen verkeerd hanteren. Het is een cirkel, geen rondje. Het is “x kwadraat”, niet “x twee”. En het is een balk, geen rechthoek.
- Geef op toetsen ook, zonder puntaftrek, aan waar taalfouten zitten. Als leerlingen zien dat jij op taal let, gaan zij dat ook doen.

ANDERE WISKUNDEDOCENTEN INSCHAKELEN

Van de collega-docenten van het samenwerkingsverband kreeg ik over motivatie de volgende adviezen:

- Spiegel altijd aan leerlingen wanneer zij zich niet wiskundig uitdrukken. Schrijf eens letterlijk op het bord wat zij zeggen i.p.v. wat zij bedoelen.
- Bij taal is communicatie belangrijk om ook van elkaar te leren. Laat dit vooral schriftelijk gebeuren omdat men mondeling nog wel eens onopgemerkt terug vervalt in het “Nederlands”.

UIT DE LITERATUUR

Het uitleggen van de wiskunde aan leerlingen is afhankelijk van hoe goed zij ook met de wiskundige symboliek om kunnen gaan. Iets heel wiskundigs noteren om het uit te leggen is niet effectief (Hajer & Meestringa, 2009). Het leren omgaan met het correcte gebruik van de wiskundige vaktaal en de wiskundige didactiek gaan dus hand in hand (van Eerde, 2009).

Dat het van belang is dat iedereen binnen een vak dezelfde terminologie gebruikt spreekt voor zich. Maar om leerlingen om te laten gaan met vaktaal zal er begonnen moeten worden met veel begeleiding waarbij termen in de juiste context staan en vaak uitgelegd worden. De taalsteun neemt geleidelijk af wanneer het gebruik van de vaktaal vanzelfsprekend is. Dit proces heet “scaffolding language” (Muller & De Boer, 2012) en gebeurt zowel in spraak als in geschrift (van der Leeuw & Meestringa, 2014).

Wanneer het vanzelfsprekende gebruik van de vaktaal bereikt wordt bij leerlingen (door vol te blijven houden van het consistente gebruik van een taal in het lesgeven) wordt dit bij de moderne vreemde talen als een kwaliteitskenmerk gezien (Kwakernaak, 2007). Het doel bij wiskunde is om leerlingen van hun Dagelijkse Algemene Taalvaardigheid in de lessen, in hun communicatie onderling, in hun schriften en uiteindelijk op de proefwerken te krijgen naar Cognitieve Academische Taalvaardigheid (van Dijk, Hajer, Scharren, & de Vos, 2013).

DE MOTIVATIE VAN LEERLINGEN

De motiverende component heeft betrekking op het motiveren van leerlingen voor de taak die voor hun ligt, maar in het geval van dit onderzoek ook om op de lange termijn motivatie zowel met uitwerkingen als de wiskundige taal aan de slag te blijven gaan. Ook bij dit onderwerp zijn collega-docenten betrokken met het zoeken naar een oplossing.

TERUG NAAR DE COLLEGA'S

Van collega-docenten binnen de school kreeg ik over motivatie de volgende adviezen:

- Leerlingen doen, vooral op de lagere niveaus, alles voor een voldoende.
- Positieve feedback doet wonderen, maar alleen als het gerechtvaardigd is.
- Wanneer een leerling moeite heeft met de stof moet je laten blijken dat jij nog steeds in die leerling gelooft.

ANDERE WISKUNDEDOCENTEN INSCHAKELEN

Van de collega-docenten van het samenwerkingsverband kreeg ik over motivatie de volgende adviezen:

- Beloon de vooruitgang die leerlingen maken, ook al is het niet genoeg. De leerling heeft er tijd en energie in gestoken, en hij wil het gevoel hebben dat het niet voor niets is geweest.
- Als je feedback geeft, doe dat dan op persoonlijk niveau. Tegen een hele klas vertellen dat ze goed (of juist slecht) hebben gewerkt is niet effectief. De leerling wil gehoord worden.

UIT DE LITERATUUR

Iedereen is te motiveren, maar motivatie is een breed begrip omdat het van veel dingen af kan hangen. Eén van de belangrijkste elementen die hier een rol in spelen is het zelfvertrouwen van leerlingen. Wanneer een leerling het vertrouwen heeft een taak die voor hem ligt tot een goed einde te brengen is de kans groot dat hij of zij er vol goede moed aan begint (Nelis & van Sark, 2014).

Eén van de dingen die daarbij kan helpen is natuurlijk een positieve benadering, maar ook moet de opdracht te doen zijn voor een leerling, zonder dat deze te makkelijk wordt (Vygotski, 1978). Kennis hebben van het kunnen van een leerling is dus heel belangrijk zodat de taak een uitdaging blijft.

Als docent moet er vooral gelet worden op dat er geen aangeleerde hulpeloosheid ontstaat (Muller D. A., Learned Helplessness, 2015). Het komt vaak genoeg voor, zeker in de lagere niveaus, dat leerlingen gedemotiveerd raken doordat zij niet in staat zijn zichzelf te helpen.

Wanneer een leerling bijvoorbeeld vaak te horen heeft gekregen dat hij of zij “het maar had moeten weten” gaat de leerling vanzelf vastzitten in een ‘Fixed Mindset’ (Dweck, 2008). De vicieuze cirkel is dan ingezet, en de leerling verkeert dan permanent in een staat van die aangeleerde hulpeloosheid. De leerling zal bij het minste obstakel hulp zoeken, of daar zelfs passief op blijven wachten in plaats van zelf proberen de oplossing te vinden.

Waar leerlingen naar toe moeten is een staat van zelf-effectiviteit (Muller D. A., Self Efficacy, 2015). Wanneer dit beschreven wordt met de drie belangrijkste pijlers van motivatie (Geerts & van Kralingen, 2012) ziet dit er als volgt uit:

Autonomie: de leerling heeft het gevoel zelfstandig een taak, met te overkomen obstakels en al, te volbrengen. Om dit te realiseren mogen opdrachten uitdagend zijn, maar niet te moeilijk.

Relatie: de leerling heeft het vertrouwen van zijn omgeving om deze taak ook te volbrengen. Anders dan zelfvertrouwen is dit het gevoel dat anderen de leerling in staat achten een taak te volbrengen. Succesbeleving door zowel leerling als de omgeving versterkt dit aspect van motivatie enorm.

Competentie: de leerling is ook werkelijk in staat deze taak uit te voeren. De opdrachten moeten dus op niveau zijn.

De autonomie en competentie zijn hier nauw met elkaar verbonden, en, samen met het relationele element, ook verder uit te diepen met de motivatie theorie van Vroom. De Verwachtingstheorie (Vroom, 1964) stelt dat de sterkte van Motivatie afhangt van drie factoren:

De verwachting: de leerling verwacht dat een bepaalde inspanning zal leiden tot een goede prestatie. Voor wiskunde is dit moeilijk, omdat vaak eerst de inspanning moet komen voordat er een verwachting van een goed resultaat gekweekt kan worden. Het doel bij leerlingen voor ogen houden, de stip aan de horizon zetten, is dus erg belangrijk.

De instrumentaliteit: wanneer er door de leerling veel en goed werk is neergezet gaat dit ook leiden tot de gewenste resultaten. Heeft de leerling het huiswerk gemaakt, dan wil hij dat dit erkend wordt. Heeft de leerling veel vragen goed, dan verwacht hij een goed cijfer.

De valentie: de gewenste resultaten hebben ook waarde voor de leerling. Wanneer de leerling een goed cijfer haalt hecht de leerling hier ook waarde aan, en wil dat ook anderen dit erkennen.

Deze drie factoren hebben veel invloed op elkaar. Het obstakel ligt in dit geval al bij de verwachting, helemaal aan het begin. Wanneer de leerling niet de verwachting of het (zelf)vertrouwen heeft dat de genomen moeite ook gaat leiden tot de uiteindelijke succesbeleving, dan zal de leerling deze moeite er ook niet in steken. Dit moet natuurlijk te allen tijde voorkomen worden.

Eén van de mogelijkheden om te allen tijde een succesbeleving te garanderen is een les die we uit het Growth vs Fixed Mindset (Dweck, 2008) kunnen halen: "Praise the process and effort, rather than the result".

CONCLUSIE

BETREFFENDE HET BELANG VAN DE UITWERKINGEN

De adviezen die uit de literatuur en van collega-docenten komen leiden tot een drieluik bij een oefening, die leerlingen moeten doorzien:

- De vraag, bestaande uit de gegeven elementen
- De uitwerking, waar elke tussenstap iets van de gegevens verduidelijkt
- Het antwoord

Het weglaten van (een stuk van) een uitwerking kan leerlingen forceren een uitwerking uit te schrijven.

Het weglaten van (een stuk van) de vraag forceert leerlingen de uitwerkingen zorgvuldig te controleren en analyseren zodat de vraag gereconstrueerd kan worden.

Het weglaten van (een stuk van) het antwoord geeft leerlingen houvast d.m.v. een goed voorbeeld, zodat deze kan zien hoe er aan een antwoord gekomen is.

BETREFFENDE HET WISKUNDIG TAALGEBRUIK

Als de wiskundige taal goed moet beklijven, kan het niet zo zijn dat leerlingen direct in het diepe gegooid worden. Leerlingen moeten herhaaldelijk worden blootgesteld aan de juiste manier van lezen, schrijven en ook spreken, en er op worden aangesproken wanneer dit niet goed gebeurt. Op deze manier kan (soms van de grond af) worden doorgebouwd op dat wat de leerling al kent. Alleen dan, wanneer de leerling thuis in het wiskundige taalgebruik, kunnen de steigers worden afgebroken en opdrachten gegeven worden die afhankelijk zijn van deze vaardigheden.

BETREFFENDE DE MOTIVATIE DIT STRUCTUREEL TE BLIJVEN DOEN

Om de motivatie voor leerlingen te verhogen voor het wiskundiger en vollediger noteren van uitwerkingen wordt aangeraden om rekening te houden met het autonomie-, het competentie- en het relatie-element. De nadruk moet liggen op autonomie en competentie, d.w.z. dat de leerling het gevoel moet krijgen de opdrachten ook zonder begeleiding succesvol volbracht kunnen worden. Belangrijker is echter dat de goede resultaten in verhouding staan tot de getoonde inzet. Een opdracht waar een goed cijfer uit komt wanneer er veel tijd in is gestoken, en waar de leerling regelmatig en structureel van positieve en gepersonaliseerde feedback voorzien wordt die leiden tot zichtbare verbeteringen, is cruciaal.

DE ONDERZOEKSVRAAG

De onderzoeksvraag luidt:

De hoofdvraag:

Hoe kunnen leerlingen uit VWO 1 bewogen worden ook op lange termijn nog steeds bewust zijn van het feit dat het opschrijven van berekeningen bij wiskunde het aanleren van een nieuwe taal is, en daarmee in staat gesteld worden hun uitwerkingen te kunnen analyseren om onnodig puntverlies, veroorzaakt door onjuiste, on-wiskundige, of onvolledige uitwerkingen, te voorkomen?

De deelvragen:

1. Welk middel is nodig om leerlingen in staat te stellen wiskundig correcte uitwerkingen te laten maken?
2. Welk middel is nodig om leerlingen in staat te stellen de wiskundige taal machtig te worden?
3. Hoe kan de (lange termijn) motivatie van leerlingen worden vergroot bij het maken van opgaven passend bij het 3^e en 7^e hoofdstuk (specifiek: hoeken meten, tekenen, en berekenen) van de 10^e editie van Getal & Ruimte voor HAVO en VWO 1?

ONTWERPEISEN

Het ontwerp moet het volgende probleem oplossen:

Leerlingen lijden onnodig puntverlies bij het maken van toetsen door onjuiste, niet-wiskundige of onvolledige uitwerkingen, in zowel het huiswerk (door gebrekkige reflectieve mogelijkheden) als op de toets. Ook de motivatie op langere termijn van leerlingen om zich te bewegen tot het uitschrijven van de uitwerkingen moet worden verhoogd.

Het ontwerp zal geïmplementeerd worden bij het 3^e hoofdstuk (Hoeken meten, tekenen, en berekenen) van de 10^e editie van Getal & Ruimte voor HAVO en VWO 1.

Aangezien reguliere opdrachten in en buiten het gebruikte methodeboek onvoldoende voorzien in het bevorderen van de wiskundige taalvaardigheid, vooral in de vorm van uitwerkingen, en hier ook de leerlingen niet toe motiveert, moet het ontwerp aan de volgende eisen voldoen:

- 1.1 Leerlingen moeten geforceerd worden intensief met uitwerkingen aan de slag te gaan.
- 1.2 Dit kan het beste gedaan worden door in de 3-luik vraag-uitwerking-antwoord of (een deel van) de vraag, of (een deel van) de uitwerkingen, of (een deel van) het antwoord weg te laten. De volgorde moet daarin zijn dat eerst het antwoord, dan de uitwerking, en dan de vraag weggelaten wordt.
- 1.3 De opdracht moet door leerlingen grondig geanalyseerd worden om deze met succes te volbrengen.
- 1.4 Wanneer de opdracht volbracht is kan deze door de leerling zelf gecontroleerd worden of de uitvoering correct is geweest.
- 2.1 Tijdens de lessen moeten leerlingen al veelvuldig in aanraking geweest zijn met de wiskundige taal op het niveau dat van hen verwacht wordt.
- 2.2 De uitwerkingen moeten zoveel mogelijk geschreven staan in de wiskundige doeltaal.
- 3.1 Uiteraard moet de opdracht van het juiste niveau zijn. Dit houdt in dat de opdracht goed ingeleid moet worden en niet aan de start van de te leren stof gegeven moet worden.
- 3.2 De opgave moet complex zijn. Het antwoord mag niet in een oogopslag te vinden zijn.
- 3.3 Het moet voor de leerling mogelijk zijn om veelvuldig, gericht, en persoonlijke feedback op het gemaakte werk te krijgen.
- 3.4 Eventueel wordt er een cijfer aan het eindproduct verbonden.

HET ONTWERP

HET VERLOOP VAN HET ONDERZOEK

Het ontwerp is een aanpassing van Hoofdstuk 3. In de lessen en het huiswerk wordt op een andere manier omgegaan met de te leren vaardigheden en inzichten, welke getoetst worden op de repetitie van het derde hoofdstuk.

Na de toets van Hoofdstuk 3 wordt deze in zijn algemeenheid besproken. Tips worden gegeven hoe er in een aansluitend hoofdstuk (dit is Hoofdstuk 7, waar ook vierhoeken, Z-hoeken en F-hoeken bij het arsenaal van oplos-technieken van de leerlingen komt) beter omgegaan kan worden met het noteren en analyseren van uitwerkingen.

Op deze manier wordt ook de langere termijn retentie en motivatie voor het opschrijven en analyseren van uitwerkingen getoetst.

Schematisch ziet de implementatie en toetsing van het ontwerp er als volgt uit:



HET ONTWERP IN DETAIL

AANPASSING PROGRAMMA HOOFDSTUK 3 – GETAL & RUIMTE HAVO/VWO JAAR 1

1. IN EEN LES: GEOGEBRA – EEN INTRODUCTIE VOOR DE BRUGKLAS (OPDRACHT 1)

Leerdoel is het verkennen en verdiepen van de hoekensom van een driehoek, het leren omgaan met de functies van GeoGebra **achter de computer**, en het volgen van veel stap-voor-stap instructies, met ingebouwde zelf-checks, na elkaar. Zie bijbehorend boekje in [Google Drive](#) en Bijlage 3.

Met drie opdrachten voor respectievelijk begin brugklas, eind brugklas, en begin tweede klas kunnen leerlingen op verschillende manieren de functies van GeoGebra

leren kennen. In dit geval is het wenselijk om leerlingen een “bewijs” van de hoekensom van de driehoek te leren kennen door deze te koppelen aan de gestrekte hoek.

Stap 8: Zoals je misschien al gezien had staat er een heel klein pijltje bij de plaatjes in de taakbalk. Deze kleurt rood als je in de buurt komt. Als je dit pijltje aanklikt komen er andere functies tevoorschijn.

Doe dit bij Rechte door twee punten, en vind de functie Lijnstuk tussen twee punten (hij staat de tweede van boven).

Stap 9: Verbind nu punt A met punt C. Verbind ook punt B met punt C. Je hebt nu een driehoek.

Stap 10: We gaan nu de hoeken weergeven. Vind de optie Hoek, en selecteer deze.

Stap 11: Omdat GeoGebra soms tussen twee lijnen de stompe hoek geeft, gaan wij aan de slag met de punten zelf. Als je de functie Hoek geselecteerd heb, klik dan achtereenvolgens op Punt B, Punt A en punt C. LET OP! Doe geen andere volgorde, anders geeft hij de stompe hoek weer.

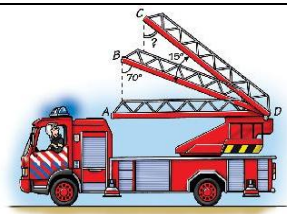
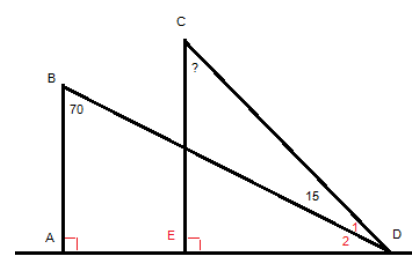
Stap 12: Doe nu hetzelfde voor achtereenvolgens punt C, B, A. En doe dit vervolgens voor punt A, C, B.

Stap 13: Je ziet nu $\alpha=...$, $\beta=...$, en $\gamma=...$ staan. Als je de getalletjes niet kunt lezen, verplaats deze dan met de Verplaats pijl. Tel nu de getallen bij elkaar op en schrijf je berekeningen op.

Stap 14: Met de Verplaats pijl verplaats je punt C nu een stukje. Je ziet de groene getallen veranderen. Tel deze getallen nogmaals op.

2. IN EEN LES: OPBOUW VAN EEN VRAAG TOT ANTWOORD

Leerdoel is om de volgende tabel bij leerlingen bij te krijgen:

Element	Bestaat uit	Voorbeeld
Vraag	Gegevens, situatie tekening, het gevraagde	V 69 In figuur 3.52 zie je een brandweerauto. Bij een bepaalde stand van de ladder is $\angle B$, de hoek met de verticale richting, gelijk aan 70°. De bestuurder draait de ladder over een hoek van 15° omhoog. Bereken $\angle C$.  figuur 3.52
Uitwerking	Abstraheren door mathematiseren, specifiek schematiseren en algebraïseren, en als laatst eventueel vereenvoudigen en/of afronden	 $\angle C =$ $\angle D_2 = 180^\circ - \angle A - \angle B$ $\angle D_2 = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ $\angle D_{12} = \angle D_1 + \angle D_2$ $\angle D_{12} = 15^\circ + 20^\circ = 35^\circ$ $\angle C = 180^\circ - \angle E - \angle D_{12}$ $\angle C = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ (hoekensom driehoek) (samengestelde hoek) (hoekensom driehoek)

Antwoord	Concluderen en Concretiseren	$\angle C = 55^\circ$
----------	------------------------------	-----------------------

Extra aandacht gaat uit naar het duidelijk maken dat het uiteindelijke antwoord slechts een heel klein deel is van de te bewandelen weg. De uitwerkingen zijn het proces waarmee een leerling tot antwoord komt, en in die uitwerkingen moet de leerling zijn wiskundige vaardigheden laten zien.

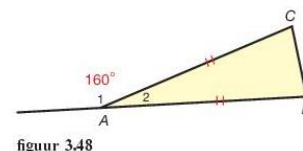
3. IN EEN LES: GEFORCEERD OPSCHRIJVEN VAN UITWERKINGEN

Om leerlingen te verplichten tot het opschrijven van uitwerkingen moet in een complexe opgave aangetoond worden dat het al gegeven antwoord goed of fout is. Hier kunnen twee of drie opgaven van het boek worden gebruikt. De docent geeft bij minimaal 1 vraag een fout antwoord. De leerlingen moeten dan tot de conclusie komen dat het antwoord fout is.

Mogelijk te stellen vragen:

- Is $\angle B$ 80° ?
- Laat zien dat $\angle B$ 80° is
- $\angle B$ is 80° . Klopt dit?
- $\angle B$ is 85° . Klopt dit?

A 65 Zie figuur 3.48.
Bereken $\angle B$.

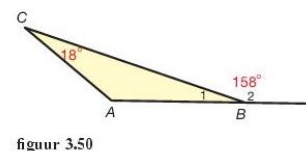


4. IN EEN LES: DE FOUT UIT DE GEGEVEN UITWERKINGEN HALEN

De docent geeft op het bord volledig uitgewerkte opgaven. De leerlingen moeten alle fouten er uit halen. Twee voorbeelden van dit soort vragen staan hieronder.

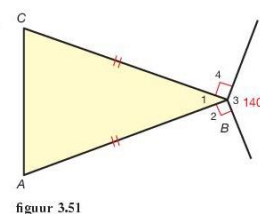
$$\begin{aligned}\angle A &= \\ \angle B_1 &= \angle C && \text{(basishoeken)} \\ \angle B_1 &= 18^\circ \\ \angle A &= 180^\circ - \angle B_1 - \angle C && \text{(hoekensom driehoek)} \\ \angle A &= 180^\circ - 18^\circ - 18^\circ = 144^\circ \\ \angle A &= 144^\circ\end{aligned}$$

A 67 Zie figuur 3.50.
Bereken $\angle A$.



$$\begin{aligned}\angle A &= \\ \angle B_1 &= 360^\circ - \angle B_2 - \angle B_3 - \angle B_4 && \text{(volle hoek)} \\ \angle B_1 &= 360^\circ - 90^\circ - 140^\circ - 90^\circ = 40^\circ \\ \angle A + \angle C &= 180^\circ - \angle B_1 && \text{(hoekensom driehoek)} \\ \angle A + \angle C &= 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \\ \angle A &= \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ\end{aligned}$$

V 68 Zie figuur 3.51.
Bereken $\angle A$.



5. THUIS: GEOGEBRA OPDRACHT 1 – HET CONSTRUEREN VAN EEN GELIJKBENIGE DRIEHOEK

Zie bijbehorend boekje in [Google Drive](#) en Bijlage 3. De leerlingen mogen de opdracht herhaaldelijk inleveren (via Magister of via email) tot een deadline (vlak voor de repetitie), en krijgen telkens feedback op hetgeen zij inleveren. Dit lijkt veel op de introductie-opdracht die zij bij de eerste stap gezien hebben en zal daarom bekend aanvoelen.

Stap 13: Onze hoek bij A staat nu ingesloten door onze twee benen, en deze benen lopen naar de andere twee hoeken van de driehoek. Teken een lijnstuk om de laatste twee hoeken te verbinden.

Bijna klaar. We moeten de andere hoeken er nog inzetten, en de boel organiseren en opruimen.

Stap 15: Zet nu de hoeken er op de goede manier in bij de overige hoeken van onze gelijkbenige

driehoek . Denk aan de volgorde van het aanklikken van de Punten. (Om te controleren; tel alle drie de hoeken bij elkaar op)

Stap 16: Wanneer we met onze aanwijzer en verplaatser rechtsklikken op de lijnen, cirkels en hoeken kunnen we deze verbergen door "Object tonen" uit te zetten. Doe dit achtereenvolgens voor de cirkel, het lijnstuk tussen Punt A en Punt B', Punt B, Punt B', het Punt want niet onderdeel is van de driehoek, en de lijn door punt A en Punt B.

Even checken: Je hebt nu alleen de drie punten, een lijnstuk, en drie hoeken staan.

Leerlingen leren hiermee een gelijkbenige driehoek construeren, iets waar vaardigheden worden bijgebracht die ook bij de andere opdracht nodig zijn.

6. THUIS: GEOGEBRA OPDRACHT 2 – HET RECONSTRUEREN VAN EEN OPGAVE

Zie bijbehorend boekje in [Google Drive](#) en Bijlage 3. De leerlingen mogen de opdracht herhaaldelijk inleveren (via Magister of via email) tot een bepaalde deadline (vlak voor de repetitie), en krijgen telkens feedback op dat wat zij Inleveren.

Leerlingen moeten zorgvuldig naar de uitwerkingen kijken om tot de juiste tekening te komen.

Voeg hier je leerlingnummer in : 11789

☒ En dan?

De gemaakte opdracht voor jou is :

*Gegeven is $\angle A_1 = 138^\circ$, $\angle B_2 = 90^\circ$, en $AB = AC$.
Bereken nu $\angle B_3$*

$\angle B_3 =$

$\angle A_2 = 180^\circ - \angle A_1$ (gestrekte hoek)

$\angle A_2 = 180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$

$\angle C_1 = \angle B_1$ (gelijkbenige driehoek ABC)

$\angle C_1 + \angle B_1 = 180^\circ - \angle A_2$ (hoekensom driehoek ABC)

$\angle C_1 + \angle B_1 = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$

$\angle C_1 = \angle B_1 = 138^\circ / 2 = 69^\circ$

$\angle B_4 = \angle B_1$ (overstaande hoek)

$\angle B_4 = 69^\circ$

$\angle B_3 = 180^\circ - \angle B_2 - \angle B_4$ (gestrekte hoek)

$\angle B_3 = 180^\circ - 90^\circ - 69^\circ = 21^\circ$

TOELICHTING EN VERANTWOORDING VOLDOENING AAN ONTWERPEISEN

De zes aanpassingen aan het programma van het hoofdstuk zijn individueel niet genoeg om aan alle ontwerpeisen te voldoen. Gezamenlijk wordt aan alle eisen voldaan.

Bij de eerste aanpassing van het programma wordt bij leerlingen aandacht besteed aan kunnen omgaan met GeoGebra. Dit is een aanpassing op het programma omdat de bij Getal & Ruimte geleverde handleiding voor GeoGebra voor leerlingen moeilijk te begrijpen is. Hiermee wordt nog niet aan ontwerpeisen voldaan.

De tweede aanpassing laat in een les zien dat er dieper ingegaan moet worden op de opbouw van een uitwerking. Hiermee wordt een begin gemaakt met het realiseren van ontwerpeis nummers 1.1, 1.2, 2.1 en 2.2.

De derde aanpassing is de kleinste. Hier wordt bij een twee- of drietal opgaven uit het boek (te selecteren door de docent) een antwoord gegeven. Van deze gegeven antwoorden bij de opgaven is er eentje fout. Leerlingen zullen zorgvuldig hun uitwerkingen, het enige ontbrekende element, moeten noteren om tot de goede conclusie te komen. Het intensieve gebruik van uitwerkingen realiseert ontwerpeis nummers 1.1, een deel van 1.2, een deel van 1.3, 1.4, 2.1 en 3.1.

De vierde aanpassing maakt dat de leerling de laatste opdrachten niet zelf maakt, maar de gemaakte opgave analyseert op juist- en onjuistheden. Deze aanpassing realiseert ontwerpeis nummers 1.1, een deel van 1.3, 1.4, 2.1, 2.2, 3.1, en 3.2.

De voorlaatste aanpassing verdiept de leerling in het gebruik van GeoGebra in de context van de lesstof. Dit realiseert ontwerpeis nummers 3.3 en eventueel 3.4.

De laatste aanpassing geeft leerlingen een uitwerking en antwoord, maar mist een deel van de opgave en vraagt deze te maken. Deze laatste aanpassing realiseert ontwerpeis nummers 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 2.2, 3.1, 3.2, 3.3 en eventueel 3.4.

POPULATIE

De klas waar deze interventie en de evaluatie daarvan plaatsvindt, is een VWO brugklas. De klas heeft 24 leerlingen in de leeftijden van 11 tot 13 jaar. Deze klas heeft drie noemenswaardige bijzonderheden;

- Ten eerste bestaat deze klas uit leerlingen met een VWO- en HAVO/VWO advies. 10 leerlingen hebben een HAVO/VWO advies. Van de andere 14 leerlingen volgen 9 het Gymnasium programma.
- Ten tweede is deze klas onderdeel van het Grotius-VWO, waar leerlingen bij een aantal vakken een lesuur minder krijgen in ruil voor de project- en excursiemiddag. Eén van de vakken die zo'n uur heeft

ingeleverd is wiskunde. Leerlingen krijgen slechts 3 maal 45 minuten wiskunde, i.p.v. de reguliere 4 maal.

- Ten slotte is belangrijk om te weten dat bij een drietal leerlingen hoogbegaafdheid is vastgesteld. Deze leerlingen doen veel berekeningen in het hoofd en schrijven weinig tussenstappen op.

Hoewel deze brugklas leerlingen heeft met een HAVO/VWO en VWO advies, worden leerlingen met enkel een HAVO advies niet getoetst.

FEEDBACK VAN COLLEGA'S

Voordat de interventie plaatsvond is het ontwerp kritisch beoordeeld door een tweetal collega's. Beide geven al langer les in de onderbouw en geven aan "wel meer met ICT te willen".

Door als een leerling met de in GeoGebra te maken opdrachten achter een computer aan de slag te gaan hebben de collega's geconstateerd dat het ontwerp in grote lijnen voldeed. Bij een tweetal stappen in het leren construeren van een driehoek in GeoGebra (de eerste opdracht) hebben zij aangeraden om deze te verduidelijken. Bij een derde stap hebben zij aangeraden een stap in twee te splitsen.

Op basis van deze reacties zijn de icoontjes van de functies toegevoegd (ook bij de introductie opdracht) en zijn er momenten ingebouwd om te "checken" of de leerling op de goede weg zit. Ook is stap 4 uitgesplitst in wat nu stap 4 en 5 is.

Door collega's te vragen met een kritisch oog naar het ontwerp te kijken is er extra zekerheid ingebouwd dat het ontwerp voldoet aan de ontwerpeisen en, indirect, aan de eisen van collega's die hier mee zelf verder willen.

VERANTWOORDING BETROUWBAARHEID EN VALIDITEIT

Om te zorgen dat de criteriumvaliditeit van dit onderzoek gewaarborgd wordt, is naast de twee toetsen een focusgroep interview gebruikt. De begripsvaliditeit is relatief hoog omdat de verdeling over de focusgroepen wordt gedaan a.d.h.v. al afgebakende voorbeelden uit het ontwerp. De interne validiteit blijft gegarandeerd zolang de uitspraken alleen gaan over de klas waar de interventie heeft plaatsgevonden.

De inter-itembetrouwbaarheid van dit onderzoek wordt gewaarborgd doordat het plaatsen van de leerlingen in de groepen volgens dezelfde criteria wordt gedaan bij zowel de eerste als de tweede toets. De intrabeoordelaarsbetrouwbaarheid wordt gewaarborgd doordat dezelfde persoon de toetsen heeft nagekeken onder dezelfde condities. Triangulatie drukt zich voor de interventie uit in het doen van vooronderzoek, de verschillende literatuurbronnen, en de diversiteit van de ondervraagde collega's. Na de interventie wordt deze gewaarborgd door de tweede toets en het focusgroep interview.

Alle relevante vormen van validiteit en betrouwbaarheid voor de evaluatie van het ontwerp blijven gewaarborgd aangezien dit een onderzoek van een docent in een enkele klas betreft. Ook het vooronderzoek, waar een grondige literatuurstudie uit voortkwam, betrof niets meer dan een verheldering van het probleem.

MEETINSTRUMENTEN

DE GEOGEBRA OPDRACHTEN

De ingeleverde GeoGebra-opdrachten worden geanalyseerd door a.d.h.v. deze de leerlingen in twee categorieën te verdelen. De eerste categorie is de groep die maximaal 1 keer feedback behoeft tot het correct kunnen construeren en reconstrueren van het gevraagde. De overige leerlingen hebben vaker dan eens feedback nodig.

Dit is om in te zien of een leerling moeite heeft met het interpreteren van de wiskunde-talige uitwerkingen van de opdracht.

DE EERSTE TOETS

Hieronder staan de vragen uit de toets van Hoofdstuk 3 waar het juiste en volledige opschrijven van de uitwerkingen gevraagd worden.

De toetsvraag, samengesteld met collega's a.d.h.v. de leerdoelen:

OPGAVE 5
In de figuur hiernaast is
 $\angle T = 70^\circ$ en $\angle R_3 = 20^\circ$.
Ook geldt: $PQ = QR$, en
 $RS = RT$.

5p (i) Bereken $\angle Q_2$.

De goede antwoorden moet zijn:

$$\angle Q_2 = 120^\circ$$

De stappen er naartoe moeten logisch op elkaar volgen vanuit de gegevens.

De puntentelling is als volgt:

Niet-logische stap, of stap overgeslagen	-1
Geen beredenering bij een rekenregel (het stuk tussen haakjes)	-1
Rekenfout	-1

Deze resultaten worden als volgt geïnterpreteerd:

Wanneer de leerling via logisch te volgen stappen bij het antwoord komt, en deze ook gestructureerd opschrijft, komt de leerling in Groep 1 terecht. Dit kunnen dus alleen de leerlingen zijn die alles goed doen, of alleen punten verliezen voor een rekenfout.

Wanneer een leerling wel bij een logisch antwoord komt, maar punten heeft verloren door het overslaan van stappen, door het maken van niet-logische stappen, of de redeneringen is vergeten, komt deze in Groep 2 terecht. Groep 2 is de groep leerlingen die hiaten vertoont in het kunnen analyseren van (eigen) uitwerkingen, en in het maken van een foutanalyse. Voorbeelden van typische fouten waarmee leerlingen in deze groep terecht komen staan in de specificaties van de interventie (zie Bijlage 2). Hier worden vragen uit het boek (67 en 68) met opzet verkeerd uitgewerkt.

Wanneer leerlingen 4 niet bij het goede antwoord kunnen komen, en laten zien de stof niet te begrijpen omdat zij vastlopen, komen zij in Groep 3 terecht. Ook leerlingen in de 3^e groep vertonen hiaten in het kunnen analyseren van (eigen) uitwerkingen en eventuele fouten daarin, maar lopen daardoor direct volledig vast.

Met deze toets wordt inzicht verkregen in de elementen van de wiskundige taal en het werken met uitwerkingen. Gemiddelden worden vergeleken met de cijfers uit het vooronderzoek om korte termijn motivatie en vaardigheid vast te stellen.

DE TWEEDE TOETS

Hieronder staan de vragen uit de toets van Hoofdstuk 7 waar het juiste en volledige opschrijven van de uitwerkingen gevraagd worden.

De toetsvraag, samengesteld met collega's a.d.h.v. de leerdoelen:

OPGAVE 4
 In het figuur hieronder geldt: $AC \parallel EF$,
 en $BC \parallel DE$.
 Verder: $\angle A_{12} = 60^\circ$, $\angle B = 40^\circ$ en
 $\angle F_3 = 70^\circ$. $CDEF$ is een parallellogram.
 Vraag **a**, **b** en **c** hoeven niet
 in volgorde gemaakt te worden.

3p (i) **a** Bereken $\angle F_1$.

3p (i) **b** Bereken $\angle S_4$.

3p (i) **c** Bereken $\angle A_1$.

De goede antwoorden moeten zijn:

$$\angle F_1 = 80^\circ$$

$$\angle S_4 = 110^\circ$$

$$\angle A_1 = 30^\circ$$

De stappen er naartoe moeten logisch op elkaar volgen vanuit de gegevens.

De puntentelling is als volgt:

Niet-logische stap, of stap overgeslagen	-1
Geen beredenering bij een rekenregel (het stuk tussen haakjes)	-1
Rekenfout	-1

Dat er per vraag nu 3 punten gegeven worden i.p.v. 5 is besloten vanwege de meervoudigheid van de vraag.

Deze resultaten worden op dezelfde manier als bij de eerste toets geïnterpreteerd.

Met deze toets wordt inzicht verkregen in de elementen van de wiskundige taal en het werken met uitwerkingen. Daarbovenop worden inzichten in de motivatie op de lange termijn verkregen omdat er in dit hoofdstuk geen interventie heeft plaatsgevonden. Gemiddelden worden vergeleken met de resultaten uit het vooronderzoek en met de resultaten van de eerste toets om de motivatie op lange termijn vast te stellen.

HET FOCUSGROEP INTERVIEW

De klas wordt na het afnemen van de tweede toets op basis van deze toets in de drie groepen verdeeld. Daarbij wordt iedereen die na de tweede toets in een andere groep zit t.o.v. de groepen van de eerste toets een extra set vragen voorgelegd. De groepen zullen hun gemaakte GeoGebra opdrachten en toetsen bij de hand hebben om in te zien wat zij gedaan hebben.

De interviews worden gehouden volgens de procedure die Krueger (2002) aanraadt. De vragen zijn een aanpassing van de door SLO (2015) ontworpen enquête voor curriculumontwerpen. Extra aandacht is uitgegaan naar vage of inconsistente antwoorden (Donk & Lanen, 2015).

VRAGEN GROEP 1

1. Op welke manieren heeft de GeoGebra-opdracht je geholpen de toetsen goed te maken?
2. Wat heb je geleerd van het werken met uitwerkingen die al gegeven zijn, of juist als enige ontbreken?
3. Welke inzichten in de wiskundige taal heb je verkregen?
4. Welke acties onderneem je als je vastloopt bij een vraag?
5. Heb je advies voor leerlingen die nu nog steeds niet met uitwerkingen werken?
6. Hoe zorg je er voor dat je ook in de toekomst vragen volledig blijft uitwerken?

EXTRA VRAGEN VOOR LEERLINGEN DIE EERST IN GROEP 2 ZATEN

1. In het verleden heb je stappen overgeslagen, en/of je stappen in je beredenering niet verantwoord. Wat heeft voor deze verandering gezorgd?

EXTRA VRAGEN VOOR LEERLINGEN DIE EERST IN GROEP 3 ZATEN

1. In het verleden heb je stappen overgeslagen, je stappen in je beredenering niet verantwoord. Je kon daardoor niet op een antwoord komen. Wat heb je nu anders gedaan?
2. Wat heeft voor deze verandering gezorgd?

VRAGEN GROEP 2

1. Op welke manieren heeft de GeoGebra-opdracht je geholpen de toetsen goed te maken?
2. Je hebt wel goede antwoorden gegeven, maar de uitwerkingen zijn onvolledig. Wat zorgde er voor dat deze stappen zijn overgeslagen?
3. Wat zou jou kunnen bewegen of helpen dit in de toekomst wel te doen?
4. Leerlingen uit de 1^e groep wilden je graag als advies meegeven dat [ADVIES]. Wat vind je daarvan?

EXTRA VRAGEN VOOR LEERLINGEN DIE EERST IN GROEP 1 ZATEN

1. In het verleden heb je stappen goed opgeschreven en je stappen in je beredenering ook goed verantwoord en elkaar logisch op laten volgen. Waarom is dat nu niet gelukt?
2. Hoe ga we er voor zorgen dat je vanaf nu wel de vragen weer volledig uitwerkt?

VRAGEN VOOR LEERLINGEN DIE EERST IN GROEP 3 ZATEN

1. In het verleden heb je stappen overgeslagen, en heb je je stappen in je beredenering niet verantwoord. Je kon daardoor niet op een antwoord komen. Wat heb je nu anders gedaan?
2. Je hebt wel voortgang geboekt, maar je bent er nog niet. Hoe gaan we er voor zorgen dat je de vanaf nu de vragen wel volledig uitwerkt?

VRAGEN GROEP 3

1. Op welke manieren heeft de GeoGebra-opdracht je geholpen te werken op de toetsen?
2. De uitwerkingen zijn onvolledig. Hierdoor heb je foute antwoorden. Waarom heb je deze stappen overgeslagen?
3. Hoe kan je nu achterhalen waar het fout is gegaan?
4. Wat zou jou kunnen bewegen of helpen in de toekomst wel uitwerkingen op te schrijven?

5. Leerlingen uit de 1^e groep wilden je graag als advies meegeven dat [ADVIES]. Wat vind je daarvan?

VRAGEN VOOR LEERLINGEN DIE EERST IN GROEP 1 ZATEN

1. In het verleden heb je stappen goed opgeschreven en je stappen in je beredenering ook goed verantwoord en elkaar logisch op laten volgen. Waarom is dat nu niet gelukt?
2. Hoe komt het dat je zelfs niet tot een antwoord kwam?
3. Hoe ga we er voor zorgen dat je vanaf nu wel de vragen weer volledig uitwerkt?

VRAGEN VOOR LEERLINGEN DIE EERST IN GROEP 2 ZATEN

1. In het verleden heb je stappen overgeslagen, en/of je stappen in je beredenering niet verantwoord. Nu kwam je zelfs niet tot een antwoord. Waarom niet?

Met de focusgroepen wordt verdiepend inzicht verkregen over de beweegredenen van de leerlingen bij zowel de eerste als de tweede toets. Ook wordt de motivatie op de lange termijn door de leerlingen zelf onderbouwd.

In Bijlage 1 staan de verwachte antwoorden om deze daarna te kunnen categoriseren.

RAPPORTAGE EN DATA-ANALYSE

DE GEOGEBRA OPDRACHTEN

Het onderdeel van de interventie dat de vorm aannam van GeoGebra opdrachten is door op 1 na alle leerlingen 100% succesvol volbracht. Iets minder dan een kwart (5 leerlingen) heeft voldoende gehad aan geen, of een enkele keer feedback krijgen om tot de voor de leerling unieke constructies in GeoGebra te komen.

DE EERSTE TOETS

Van de 24 leerlingen, die allen onderhevig geweest zijn aan de interventie, hebben er uiteindelijk 20 de eerste toets goed doorstaan en zijn in Groep 1 terecht gekomen. Een drietal leerlingen hebben stappen overgeslagen, hebben onjuist beredeneerd, en/of niet-logische stappen genomen. Deze drie zijn in de 2^e groep terecht gekomen. Slechts 1 leerling wist niet aan een antwoord te komen.

DE TWEEDE TOETS

Bij de tweede toets zijn 21 leerlingen geslaagd in het correct beredeneren, en, als gevolg daarvan, het vinden van het juiste antwoord. Slechts 1 leerling heeft stappen overgeslagen. Een tweetal leerlingen wist niet tot goede antwoorden te komen.

Na de eerste toets zijn 19 van de 20 leerlingen in de eerste groep gebleven. Eén leerling heeft stappen overgeslagen en degradeerde naar Groep 2.

Vanuit de 2^e groep zijn 2 van de 3 leerlingen gepromoveerd naar Groep 1. Zij sloegen nu geen stappen over en misten geen beredenering. De derde leerling kwam nu zelfs niet tot een goed antwoord en degradeerde naar Groep 3.

De leerling in de 3^e groep heeft daar niet uit weten te klimmen en kwam nog steeds niet tot een goed antwoord.

IN OVERZICHT

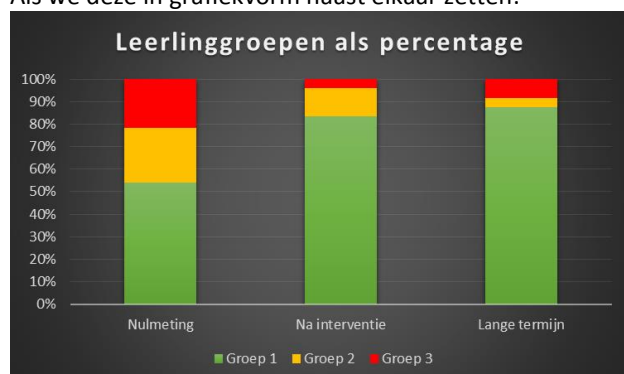
Hieronder staat dit overzicht in een tabel waarin elke pijl 1 leerling is:

	Toets 1	Verandering	Toets 2
Groep 1	20 (83,3%)		21 (87,5%)
Groep 2	3 (12,5%)		1 (4,2%)
Groep 3	1 (4,2%)		2 (8,3%)

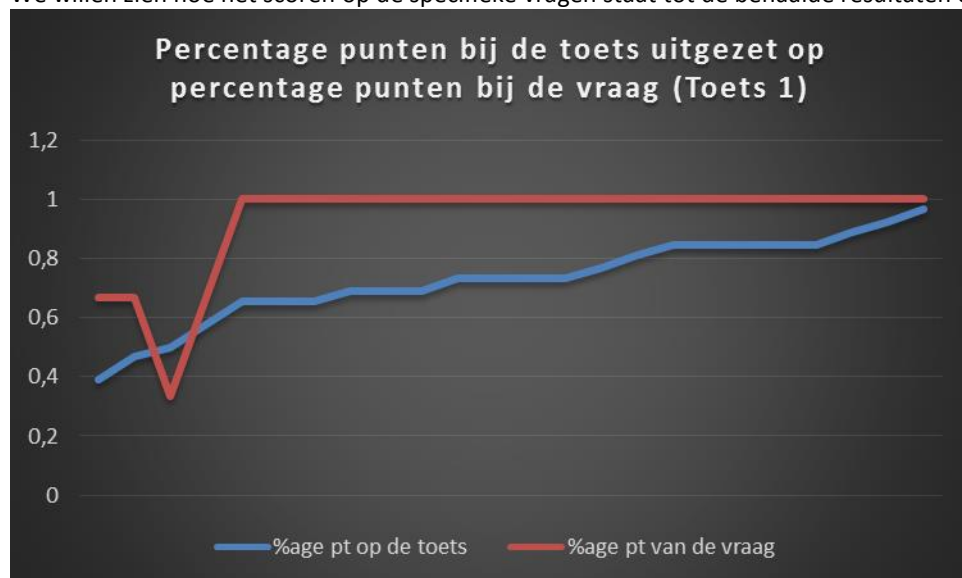
In vergelijking met de aantallen in het vooronderzoek zijn de resultaten opvallend goed.

	Vooronderzoek
Groep 1	40 (54,0%)
Groep 2	18 (24,3%)
Groep 3	16 (21,6%)

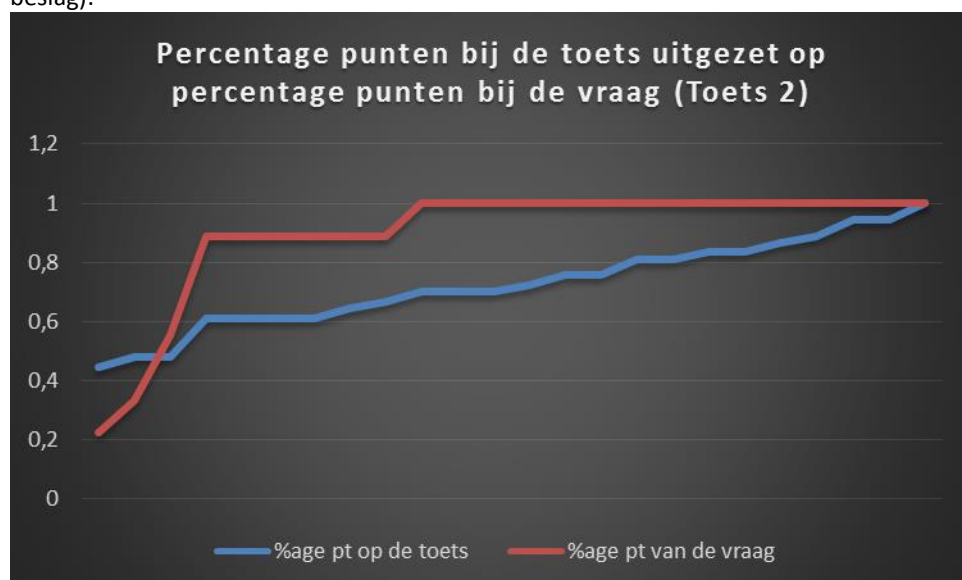
Als we deze in grafiekvorm naast elkaar zetten:



We willen zien hoe het scoren op de specifieke vragen staat tot de behaalde resultaten op de toets:



En bij de tweede toets (het aantal punten voor de specifieke vraag nam een groter deel van het totaal in beslag):



HET FOCUSGROEP INTERVIEW

In Bijlage 2 staan de resultaten van het Focusgroep interview. Hierin betekent Groep 1.1 dat de leerling in 1^e instantie in Groep 1 zat, en daar ook in is gebleven. Iedereen die in de eerste groep terecht is gekomen krijgt deze vragen. Groep 2.3 houdt in dat de leerling in de 3^e groep zat, maar nu in de Groep 2 wist te komen. Dit zijn extra vragen aan leerlingen die eerst niet in de groep zaten waar zij nu in terecht zijn gekomen.

In de bijlage staan per tabelhokje van boven naar beneden de meest gegeven antwoorden. Een pijltje betekent dat er doorgevraagd is voor verduidelijking van het gegeven antwoord. In het vet staat het meest gegeven antwoord op de vraag in het algemeen of waar in de desgevraagde groep het meest instemming over zichtbaar werd. De leerlingen hadden hun gemaakte toetsen tijdens de gesprekken bij zich.

Groep 1 was veruit de grootste groep met 21 leerlingen. De consensus in deze groep was dat de GeoGebra opdrachten maar verwarrend waren. De leerlingen hadden dan ook niet het idee dat deze opdrachten geholpen zouden hebben. Toch was er een aantal dat een goed voorbeeld had aan de gegeven uitwerkingen. De meesten waren dan ook van mening dat de uitwerkingen belangrijker zijn dan het gegeven antwoord en gaven aan deze ook opnieuw te zullen doorlopen wanneer zij vast lopen tijdens een huiswerk- of toetsvraag.

Over de wiskundige taal was deze groep minder positief. Pas na een voorbeeld gegeven te hebben [$\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C$ (*hoekensom driehoek*)] en gevraagd te hebben dit hardop te lezen beseften de leerlingen dat wiskunde ook een taal is. Een groot deel van de groep gaf als verklaring al aan volledig bekend te zijn met de symbolen.

Desgevraagd gaven leerlingen in deze groep adviezen aan de leerlingen die hun uitwerkingen nog niet opschrijven. Buiten de aanmoediging het toch te doen ter voorkoming van puntverlies was het meest prominente advies het tijdens het huiswerk al aan te leren. Ook het aanleren van foutanalyse schemerde voorzichtig door toen de klas instemde met het advies om ook op toetsen de tijd te nemen voor het nakijken en eventueel analyseren van de berekeningsstappen aangezien een nagekeken toets specifiek aangeeft waar de fout gemaakt is.

Groepen 2 en 3 bestonden uit respectievelijk één en twee leerlingen. Om verschillende redenen gaven deze leerlingen aan tijdens de toets in tijdnood gekomen te zijn. Een enkele leerling gaf te kennen simpelweg niet te zien hoe de opgave opgelost moest worden.

Op de gegeven adviezen werd gereageerd met de belofte zorgvuldiger te werken en iets vaker al het hele huiswerk te maken en controleren.

CONCLUSIE, DISCUSSIE EN AANBEVELINGEN

CONCLUSIE

Dit onderzoek heeft getracht de volgende vraag te beantwoorden:

Hoe kunnen leerlingen uit VWO 1 bewogen worden ook op lange termijn nog steeds bewust zijn van het feit dat het opschrijven van berekeningen bij wiskunde het aanleren van een nieuwe taal is, en daarmee in staat gesteld worden hun uitwerkingen te kunnen analyseren om onnodig puntverlies, veroorzaakt door onjuiste, on-wiskundige, of onvolledige uitwerkingen, te voorkomen?

Aan de hand van de resultaten, welke zijn verkregen door de data-analyse, ben ik tot de volgende conclusies gekomen.

HET BELANG VAN DE UITWERKINGEN

In de lessen zijn, als onderdeel van de interventie, elementen richting het einde van het hoofdstuk anders aangepakt. Het aanleren van de opbouw van vraag tot antwoord, het geforceerd opschrijven van uitwerkingen en het eruit halen van fouten in de uitwerkingen zijn niet onderhevig geweest aan aparte toetsing.

De GeoGebra-opdrachten, aangepast met de feedback van collega's, is voor vrijwel alle leerlingen, al dan niet met feedback, op het juiste niveau. Slechts 1 van de 24 leerlingen wist niet tot de gezochte tekeningen bij de opgaven te komen.

Het effect op de toetsresultaten, ook op lange termijn, is opvallend. In vergelijking met een vooronderzoek scoren leerlingen veel beter op het volledig en juist beredeneren van de gegeven antwoorden op wiskundige, specifiek meetkundige, vragen. Van de 24 leerlingen hebben 21 leerlingen een toets waarop de interventie een voorbereiding was tot een goed einde gebracht, terwijl in het vooronderzoek dit 40 van de 74 betrof.

Wanneer we kijken naar het aantal leerlingen dat, met gehavende berekeningen of niet, op een goed antwoord uit wist te komen zijn ook hier de effecten duidelijk zichtbaar. Waar voorheen nog 58 van de 74 tot een goed antwoord wisten te komen, zijn dat er nu 23 van de 24. De interventie lijkt daarmee het gewenste effect te hebben op het volledig opschrijven van uitwerkingen.

Uit de focusgroep is meer duidelijk geworden over de achterliggende redenen en ervaringen van de leerlingen. Hoewel veel leerlingen goed presteerden vonden zij de opdrachten niet altijd duidelijk en vaak zelfs verwarrend. Zij gaven aan daardoor goed te moeten nadenken en vaak terug te moeten kijken. Het is opvallend dat juist dit geluid komt uit de groep die het beste gescoord heeft.

Leerlingen zijn het er over eens dat wiskundige antwoorden, en daarmee het scoren van de punten op de toetsen, voor hen meer gaat om de uitwerkingen dan om de antwoorden. Zij geven ook aan nu gemakkelijker het proces van de uitwerkingen nog eens te doorlopen als zij vastlopen. Bij de drie leerlingen waar het niet gelukt is om tot volledige uitwerkingen en goede antwoorden te komen zijn verschillende factoren aan te wijzen. Tijdnood en onzorgvuldigheid worden aangewezen als oorzaak.

DE MOTIVATIE VAN LEERLINGEN

Wanneer gekeken wordt naar de verschuivingen op de langere termijn zien we dat deze nauwelijks plaats hebben gevonden. Twee leerlingen zijn beter gaan presteren, terwijl er ook twee leerlingen slechter zijn gaan presteren. Geen van deze leerlingen heeft een volledige terugval gedemonstreerd.

Uit het interview blijkt dat de leerlingen die zijn teruggevallen dit niet deden door een gebrek in het ontwerp, maar vanwege tijdnood bij het afmaken van de toets. Onder de leerlingen die niet terugvielen is de consensus dat het volledig uitwerken van opgaven een gewoonte is geworden. Het gewenste effect op de motivatie en retentie over een langere termijn lijkt daarmee bereikt.

DE WISKUNDIGE TAAL

Uit de ingeleverde GeoGebra-opdrachten blijkt dat, hoewel er in meer dan driekwart van de gevallen meervoudig behoefte is geweest aan feedback, vrijwel alle leerlingen de uitwerkingen in de wiskundige taal uiteindelijk wisten te ontcijferen.

Uit de GeoGebra opdrachten, en indirect uit de toetsresultaten, blijkt ook dat de vragen, geschreven in de wiskundige taal, goed begrepen werden. Dit zien we eveneens terug in het commentaar in de focusgroep. Tegelijk blijkt uit het feit dat zij aan de taligheid herinnerd moesten worden dat dit inzicht nog in het onbewuste blijft. Toch heeft de taalsteun, het “scaffolden”, geholpen de resultaten te verbeteren. Het onderzoeksdoel wat betreft de kennis van de wiskundige taal is daarmee deels behaald. Het inzicht daarin nog niet.

EINDOORDEEL

In conclusie kan gezegd worden dat de interventie grotendeels geslaagd is. Leerlingen zijn het belang van uitwerkingen, ook op langere termijn, in gaan zien en hebben daar, weliswaar onbewust, voldoende kennis van de wiskundige taal voor opgedaan.

BEPERKINGEN

Het uitgevoerde onderzoek is met zorg samengesteld, uitgevoerd en geanalyseerd. Toch moeten ook enkele beperkingen van dit onderzoek worden aangeven.

Voor zover nu kan worden overzien zijn dit de beperkingen:

De lezer moet er rekening mee houden dat het ontwerp uit deze studie gebaseerd is op de problematiek in de brugklassen HAVO en VWO van het Grotius College.

Hoewel collega's in andere leerlagen en leerjaren eenzelfde problematiek zeggen te ervaren is gekozen om het onderzoek te richten op de brugklas, omdat op dat punt in de schoolcarrière het niet willen of kunnen opschrijven van uitwerkingen ontstaat.

De externe validiteit is niet gegarandeerd.

De gekozen populatie is een VWO-klas op het Grotius College. Andere groepen zijn niet meegenomen in het onderzoek. Hoewel het ontwerp gericht is op de HAVO en VWO groepen, en de onderzochte groep bestaat uit leerlingen met een HAVO/VWO of VWO-advies, zijn er geen leerlingen meegenomen met een HAVO-advies. De resultaten kunnen mede om die reden niet veralgemeniseerd worden.

De herhaalbaarheid is niet getoetst.

Hoewel er twee metingen hebben plaatsgevonden is het doel van de tweede meting geweest om het effect op lange termijn te meten. Hoewel dezelfde toetsen zijn afgenomen in HAVO en HAVO/VWO klassen zijn de resultaten niet meegenomen in dit onderzoek. Ook zijn er per toets geen controlevragen gesteld waarmee een resultaat geverifieerd kon worden.

De interbeoordelersbetrouwbaarheid is niet gegarandeerd.

In het onderzoek zijn de metingen door slechts 1 beoordelaar gedaan. Hoewel collega's input hebben gehad in het uiteindelijke ontwerp hebben deze zelf geen metingen verricht in het onderzoek.

De interne validiteit is enkel gegarandeerd voor de genomen populatie.

Aangezien er geen resultaten van vergelijkbare controlegroepen zijn geldt de interne validiteit alleen voor de onderzochte klas.

DISCUSSIE

Naast de mate waarin het onderzoeksdoel behaald is, is de onderzoeker tot verdere inzichten gekomen.

VERVOLGONDERZOEK

Zo zijn er een aantal vragen tijdens dit onderzoek naar voren gekomen die door vervolgonderzoek beantwoord kunnen worden:

Hoe effectief is dit ontwerp bij leerlingen die een lager advies hebben?

Naast leerlingen met een VWO en HAVO/VWO advies zou ook bij leerlingen met een HAVO en een MAVO/HAVO advies gekeken moeten worden hoe effectief een interventie als deze is in het belang gaan hechten aan uitwerkingen. Wanneer een leerling uiteindelijk voor de bovenbouw HAVO Wiskunde B heeft gekozen, of zelfs op het VWO belandt, kan een leerling die niet onderhevig is geweest aan dit ontwerp als nog moeite ervaren met het belang van de uitwerkingen. Eventueel kan het bij leerlingen met een MAVO/HAVO advies als element gebruikt worden om te determineren.

Hoe komt het dat leerlingen zich wel de wiskundige taal weten eigen te maken, maar dat de bewustwording hiervan niet plaats vindt?

Wanneer leerlingen de betekenis van de wiskundige symbolen weten kunnen zij dit vertalen naar het Nederlands en daardoor de vraag goed begrijpen. Dat dit ook echt als middel gebruikt kan worden om te communiceren ligt niet voor de hand.

VERDERE INZICHTEN

Verdere inzichten die niet direct verband houden met dit onderzoek kunnen ook nog uitgediept worden:

Bestaat er een verband tussen het verwarrend vinden van opdrachten, de behoefte aan feedback en de opgedane kennis en vaardigheden achteraf?

In de literatuurstudie kwam al naar voren dat geregeld feedback op gemaakt werk het leren bevordert. Om die reden kan de opdracht van een wat hoger niveau gemaakt worden. Maar zorgt een opdracht die van een niveau of complexiteit is boven het niveau van leerlingen, zolang er maar vaak genoeg feedback op gegeven kan worden, voor betere leerresultaten?

Is het mogelijk een vervolg aan deze interventie te geven in andere takken van de wiskunde?

Of eenzelfde effect bereikt kan worden bij de andere onderwerpen in de wiskunde kan onderzocht worden. Statistiek zou met behulp van Excel gedaan kunnen worden, maar het is goed mogelijk om GeoGebra in te zetten bij bijvoorbeeld Differentiëren en Integreren. Ook voor de Algebra kan een dergelijke toepassing gevonden worden.

In hoeverre kan, of gaat GeoGebra als standaardtoepassing gebruikt worden?

De meest gebruikte methodes om wiskunde mee te doceren op het voortgezet onderwijs zijn Moderne Wiskunde en Getal & Ruimte. Deze hebben vrijwel elk hoofdstuk voorzien van een paragraaf te doen met GeoGebra. Ook de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en het College van Toetsen en Examen zijn aan het verkennen hoe GeoGebra tijdens de examens gebruikt kan en mag worden voor de HAVO- en VWO-leerlijn.

AANBEVELINGEN

De conclusies in ogenschouw nemend zijn er enkele adviezen voor degene die eenzelfde belang heeft bij het correct en volledig uitwerken van wiskundige opgaven door leerlingen.

Wanneer dit ontwerp in zijn volledigheid wordt toegepast moet er rekening gehouden worden met 1 à 2 extra lessen die het gebruik van GeoGebra en de drieluik van vraag-uitwerking-antwoord uitgebreid behandelen. Als GeoGebra dan gebruikt wordt zal er een les in een lokaal met computers worden doorgebracht. Het laten inleveren in een ELO (bijvoorbeeld magister) geeft een ordelijk overzicht van waar de leerling precies staat.

Leerlingen uit een brugklas raken heel snel gewend aan een nieuwe ICT applicatie (vandaar dat er gelijk iets van wiskunde kan worden uitgelegd). Daarin als docent vaardig worden kost meer tijd, zeker wanneer verwacht wordt dat je boven de stof staat. Nu hoeft voor dit ontwerp geen volledige cursus doorlopen te worden, maar geregeld wat aandacht en het lef hebben om er mee te experimenteren is wel noodzakelijk.

Het is ook wenselijk, vooral wanneer meerdere collega's in parallelklassen met dit ontwerp aan de slag gaan, om een docentenhandleiding of rubric te schrijven voor het beoordelen van de opdrachten die leerlingen inleveren. Op die manier kan dezelfde feedback gegeven worden aan leerlingen over de GeoGebra opdrachten, en eventueel ook een gelijkwaardig cijfer.

Wat betreft de ICT-faciliteiten bij de leerlingen is het goed mogelijk een klas voor te stellen waar thuis geen computer beschikbaar is. In zo'n geval kan het op papier geven en inleveren van de GeoGebra-opdrachten uitkomst bieden. Het nadeel is dat de leerling het verschil tussen construeren en tekenen niet ervaart, tenzij het gebruik van de passer verplicht wordt.

BIJLAGE 1 – DE VERWACHTE ANTWOORDEN BIJ HET FOCUSGROEP INTERVIEW

LEERLINGEN DIE IN GROEP 1 EINDIGEN

Groep 1.1	Positief	Neutraal	Negatief
Op welke manieren heeft de GeoGebra-opdracht je geholpen de toetsen goed te maken?	-Symbolen begrijpen -Andere manier oefenen -Goed naar de opdracht kijken -Leuke opdracht	-Het kwam niet op de toets terug	-Geen enkele manier
Wat heb je geleerd van het werken met uitwerkingen die al gegeven zijn, of juist als enige ontbreken?	-Ja de symbolen/notatie snap ik nu	-Ik wist niet dat wiskunde een taal was	-Ik snap de symbolen nog steeds niet
Welke inzichten in de wiskundige taal heb je verkregen?	-Dat wiskunde een middel is om mee te communiceren	-Weet ik niet -Ik snap nu de symbolen	-Geen -Geen idee
Welke acties onderneem je als je vastloopt bij een vraag?	-Nog eens alle stappen doorlopen	-Later nog eens proberen	-Overslaan
Heb je advies voor leerlingen die nu nog steeds niet met uitwerkingen werken?	Adviezen noteren		
Hoe zorg je er voor dat je ook in de toekomst vragen volledig blijft uitwerken?	Reflectieve vraag, antwoord is spiegel naar de leerling		
Groep 1.2			
In het verleden heb je stappen overgeslagen, en/of je stappen in je beredenering niet verantwoord. Wat heeft voor deze verandering gezorgd?	Dit zijn acties die ondernomen zijn waar de interventie geen invloed op gehad zou moeten hebben		
Groep 1.3			
In het verleden heb je stappen overgeslagen, je stappen in je beredenering niet verantwoord. Je kon daardoor niet op een antwoord komen. Wat heb je nu anders gedaan?	Dit zijn acties die ondernomen zijn waar de interventie geen invloed op gehad zou moeten hebben		
Wat heeft voor deze verandering gezorgd?	Dit zijn acties die ondernomen zijn waar de interventie geen invloed op gehad zou moeten hebben		

LEERLINGEN DIE IN GROEP 2 EINDIGEN

Groep 2.2			
Op welke manieren heeft de GeoGebra-opdracht je geholpen de toetsen goed te maken?	-Je moet opgaven goed lezen -Je doorziet hoe je aan het antwoord komt	-Ik snapte het ook zonder de opdracht	-Niets -Ik snap nog steeds niet waarom ik zoveel moest opschrijven
Je hebt wel goede antwoorden gegeven, maar de uitwerkingen zijn onvolledig. Wat zorgde er voor dat deze stappen zijn overgeslagen?	-Uitwerkingen controleren op fouten	-Verbeteren -De opgave opnieuw maken	-Vragen aan de docent of aan klasgenoten

Wat zou jou kunnen bewegen of helpen dit in de toekomst wel te doen?	Reflectieve vraag
Leerlingen uit de 1e groep wilden je graag als advies meegeven dat [ADVIES]. Wat vind je daarvan?	Reflectieve vraag
Groep 2.1	
In het verleden heb je stappen goed opgeschreven en je stappen in je beredenering ook goed verantwoord en elkaar logisch op laten volgen. Waarom is dat nu niet gelukt?	Individueel antwoord. Elk antwoord uitgebreid checken; hier liggen hiaten in het ontwerp.
Hoe ga we er voor nu zorgen dat je vanaf nu wel de vragen weer volledig uitwerkt?	Reflectieve vraag.
Groep 2.3	
In het verleden heb je stappen overgeslagen, en heb je je stappen in je beredenering niet verantwoord. Je kon daardoor niet op een antwoord komen. Wat heb je nu anders gedaan?	Individueel antwoord. Elk antwoord uitgebreid checken; hier zijn verbeteringen zonder interventie gebeurd.
Je hebt wel voortgang geboekt, maar je bent er nog niet. Hoe gaan we er voor zorgen dat je de vanaf nu de vragen wel volledig uitwerkt?	Reflectieve vraag.

LEERLINGEN DIE IN GROEP 3 EINDIGEN

Groep 3.3			
Op welke manieren heeft de GeoGebra-opdracht je geholpen de toetsen goed te maken?	-Symbolen begrijpen -Andere manier oefenen -Goed naar de opdracht kijken -Leuke opdracht	-Het kwam niet op de toets terug	-Geen enkele manier
De uitwerkingen zijn onvolledig. Hierdoor heb je foute antwoorden. Waarom heb je deze stappen overgeslagen?	-Ik deed de berekeningen in mijn hoofd	-Ik deed de berekeningen in mijn hoofd -Ik wist niet hoe ik het moest opschrijven -Ik had er geen tijd voor	-Ik wist niet wat ik moest opschrijven
Hoe kan je nu achterhalen waar het fout is gegaan?	Reflectieve vraag, antwoord is meer een spiegel naar de leerling		
Wat zou jou kunnen bewegen of helpen in de toekomst wel uitwerkingen op te schrijven?	Reflectieve vraag, antwoord is meer een spiegel naar de leerling		
Leerlingen uit de 1^e groep wilden je graag als advies meegeven dat [ADVIES]. Wat vind je daarvan?	Hangt af van de gegeven adviezen		
Groep 3.1			

In het verleden heb je stappen goed opgeschreven en je stappen in je beredenering ook goed verantwoord en elkaar logisch op laten volgen. Waarom is dat nu niet gelukt?	Individueel antwoord. Elk antwoord uitgebreid checken; hier liggen hiaten in het ontwerp.
Hoe komt het dat je zelfs niet tot een antwoord kwam?	Reflectieve vraag. Vraagt door op de vorige vraag
Hoe ga we er voor nu zorgen dat je vanaf nu wel de vragen weer volledig uitwerkt?	Reflectieve vraag.
Groep 3.2	
In het verleden heb je stappen overgeslagen, en/of je stappen in je beredenering niet verantwoord. Nu kwam je zelfs niet tot een antwoord. Waarom niet?	Individueel antwoord. Elk antwoord uitgebreid checken; hier liggen hiaten in het ontwerp.

BIJLAGE 2 – DE GEGEVEN ANTWOORDEN BIJ HET FOCUSGROEP INTERVIEW

LEERLINGEN DIE IN GROEP 1 ZIJN GEËINDIGD

Groep 1.1 (21 leerlingen)	Positief	Neutraal	Negatief
Op welke manieren heeft de GeoGebra opdracht je geholpen te werken op de toetsen?	-Je had een goed voorbeeld hoe je een uitwerking op moet schrijven. -Het is weer eens wat anders dan sommen maken. -De feedback hielp veel	-Ik moest bij de opdracht hard nadenken -Weet ik niet	-Ik raakte vaak in de war -> Ik moest veel nadenken en vaak terug kijken -> Ik denk niet dat het mij geholpen heeft
Wat heb je geleerd van het werken met uitwerkingen die al gegeven zijn, of juist als enige missen?	-Dat uitwerkingen bij wiskunde belangrijker zijn dat het antwoord -De variatie zorgde wel dat ik het beter snapte	-Sommige opgaven waren makkelijker, andere weer moeilijker -> Dat was omdat het elke keer anders gevraagd werd	-Het levert veel meer werk op als je alles moet opschrijven
Welke inzichten in de wiskundige taal heb je verkregen?	-Ik heb de symbolen uit mijn hoofd geleerd -> Ik kan nu "wiskundigs" lezen en schrijven	-Ik begreep al wat er stond geschreven	-Wiskunde is een taal? Zo heb ik het nooit gezien -> [Een voorbeeld wordt getoond en gevraagd wordt het hardop voor te lezen] -> "Hoek A is 180 graden min hoek B min hoek C vanwege de hoekensom van een driehoek" -> Oh ja, op die manier
Welke acties onderneem je als je vastloopt bij een vraag?	-Ik loop van af het begin mijn uitwerkingen door	-Ik laat het voor wat het is en kom er later op terug	-Ik ga door met de volgende
Heb je advies voor leerlingen die nu nog steeds niet met uitwerkingen werken?	-Doe het wel, het kost je anders punten -Als je het niet doet, en het gaat fout weet je niet meer waar je fouten maakte -Leer jezelf aan het tijdens het huiswerk al te doen		
Hoe zorg je er voor dat je ook in de toekomst vragen volledig blijft uitwerken?	-Het is nu een gewoonte -Ik hoop daar wel aan herinnerd te worden -Krijgen we dan ook weer zo'n opdracht?		
Groep 1.2 (2 leerlingen)			
In het verleden heb je stappen overgeslagen, en/of je stappen in je beredenering niet verantwoord. Wat heeft voor deze verandering gezorgd?	-Ik loop mijn uitwerkingen nog eens na -> Dat doe ik omdat [mijn buurvrouw] zegt dat uitwerkingen veel belangrijker zijn dan het antwoord. -Met het bespreken van de eerste toets zag ik wat ik fout deed.		
Groep 1.3 (0 leerlingen)			
In het verleden heb je stappen overgeslagen, je stappen in je beredenering niet verantwoord. Je kon daardoor niet op een			

antwoord komen. Wat heb je nu anders gedaan?	
Wat heeft voor deze verandering gezorgd?	

Dit hele gesprek heeft ongeveer 50 minuten geduurd. De leerlingen gaven aan alle gedachten te hebben uitgesproken. Opvallend veel antwoorden werd binnen de groep overeenstemming gevonden.

LEERLINGEN DIE IN GROEP 2 ZIJN GEËINDIGD

Groep 2.2 (1 leerling)			
Op welke manieren heeft de GeoGebra opdracht je geholpen te werken op de toetsen?	-Ik zag hoe uitwerkingen opgeschreven moesten worden.		
Je hebt wel goede antwoorden gegeven, maar de uitwerkingen zijn onvolledig. Wat zorgde er voor dat deze stappen zijn overgeslagen?			-Ik denk dat ik wat haast had -> ik heb ook niet mijn uitwerkingen nog eens teruggelezen*
Wat zou jou kunnen bewegen of helpen dit in de toekomst wel te doen?	-Ik denk dat ik wat netter [zorgvuldiger] moet werken		
Leerlingen uit de 1e groep wilden je graag als advies meegeven dat [ADVIES]. Wat vind je daarvan?	-Ik heb ook geprobeerd alles op te schrijven -> Ik dacht te weinig tijd te hebben -> Ik denk het ook wel te kunnen		
Groep 2.1 (1 leerling)			
In het verleden heb je stappen goed opgeschreven en je stappen in je beredenering ook goed verantwoord en elkaar logisch op laten volgen. Waarom is dat nu niet gelukt?	-Ik denk dat ik wat haast had -> ik heb ook niet mijn uitwerkingen nog eens teruggelezen* -> Waarom ik het op de eerste toets wel kon doen weet ik niet meer *Dit is hetzelfde antwoord		
Hoe ga we er voor nu zorgen dat je vanaf nu wel de vragen weer volledig uitwerkt?	-Meer tijd er voor nemen, denk ik		
Groep 2.3 (0 leerlingen)			
In het verleden heb je stappen overgeslagen, en heb je je stappen in je beredenering niet verantwoord. Je kon daardoor niet op een antwoord komen. Wat heb je nu anders gedaan?			
Je hebt wel voortgang geboekt, maar je bent er nog niet. Hoe gaan we er voor zorgen dat je de vanaf nu de vragen wel volledig uitwerkt?			

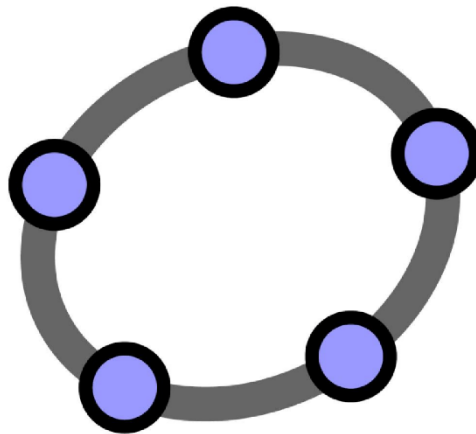
Dit hele gesprek heeft ongeveer 10 minuten geduurd. De leerling gaf aan alle gedachten te hebben uitgesproken.

LEERLINGEN DIE IN GROEP 3 ZIJN GEËINDIGD

Groep 3.3 (2 leerlingen)			
Op welke manieren heeft de GeoGebra opdracht je geholpen te werken op de toetsen?		-Weet ik niet -Ik vond het wel een leuke opdracht	
De uitwerkingen zijn onvolledig. Hierdoor heb je foute antwoorden. Waarom heb je deze stappen overgeslagen?		-Ik ben ergens begonnen maar ik heb hem daarna overgeslagen omdat ik in tijdnood zat	-Ik zag het gewoon niet op de toets
Hoe kan je nu achterhalen waar het fout is gegaan?	-Weet ik niet -> Niet		
Wat zou jou kunnen bewegen of helpen in de toekomst wel uitwerkingen op te schrijven?	-Als ik meer tijd had zou ik het denk ik wel doen. -Weet ik niet		
Leerlingen uit de 1 ^e groep wilden je graag als advies meegeven dat [ADVIES]. Wat vindt je daarvan?	-Ik wilde de uitwerkingen al opschrijven -Ik denk dat ik iets vaker mijn huiswerk moet maken en controleren		
Groep 3.1 (0 leerlingen)			
In het verleden heb je stappen goed opgeschreven en je stappen in je beredenering ook goed verantwoord en elkaar logisch op laten volgen. Waarom is dat nu niet gelukt?			
Hoe komt het dat je zelfs niet tot een antwoord kwam?			
Hoe ga we er voor nu zorgen dat je vanaf nu wel de vragen weer volledig uitwerkt?			
Groep 3.2 (1 leerling)			
In het verleden heb je stappen overgeslagen, en/of je stappen in je beredenering niet verantwoord. Nu kwam je zelfs niet tot een antwoord. Waarom niet?	Ik zat in tijdnood -> Ik heb te lang bij een andere vraag stilgestaan		

Dit hele gesprek heeft ongeveer 15 minuten geduurd. De leerlingen gaven aan alle gedachten te hebben uitgesproken.

GeoGebra



...een introductie voor de brugklas

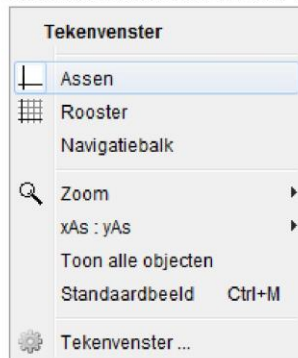
Auteur: Arnaud Jasperse

Opdracht 1

Stap 1: Start GeoGebra op. Als er gevraagd wordt om een update te installeren doe dit dan niet.

Stap 2: Maximaliseer het scherm voor het beste overzicht.

Stap 3: Rechtsklik met je muis op het rechter veld (dit heet het Tekenvenster) met de assenstelsels en zet de assenstelsels uit door op het woord Assen te klikken (zie plaatje hieronder).



Stap 4: De functie van je muis is nu om getekende dingen te Verplaatsen.

Om dit te veranderen moet je een andere functie in de taakbalk (de rij met alle plaatjes) selecteren.

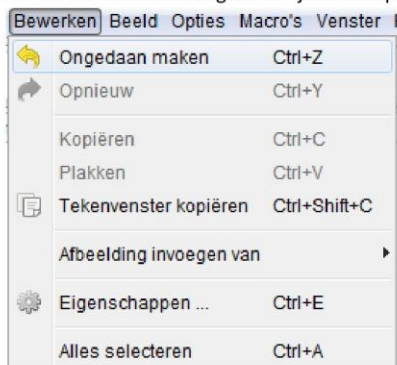
We selecteren nu de functie Nieuw punt 

Stap 5: Zet nu twee punten in het Tekenvenster naast elkaar met een stukje er tussen. Je ziet dat deze punten A en B heten. GeoGebra noemt automatisch elk punt anders.

Stap 6: We gaan nu een lijn zetten door deze punten heen. Deze functie heet Rechte door twee punten. 

Zoals je ziet "pakt" het punt je cursor als je in de buurt komt. Het licht op met een lichtblauwe rand. Als je klikt wanneer een voorwerp op deze manier is opgelicht liggen de objecten op exact dezelfde plaats. In dit geval gaat je lijn (als je hem al gezet hebt) precies door deze punten heen.

LET OP! Als er iets fout gaat kan je een stap terug doen door via Bewerken iets Ongedaan te maken.



Stap 7: Je hebt nu een lijn die door punt A en punt B loopt, maar ook een stuk verder. Zet nu wederom een Nieuw punt neer (punt C) doe dit een stukje boven de lijn.

Stap 8: Zoals je misschien al gezien had staat er een heel klein pijltje bij de plaatjes in de taakbalk. Deze kleurt rood als je in de buurt komt. Als je dit pijltje aanklikt komen er andere functies tevoorschijn.

Doe dit bij Rechte door twee punten, en vind de functie Lijnstuk tussen twee punten (hij staat de tweede van boven).



Stap 9: Verbind nu punt A met punt C. Verbind ook punt B met punt C. Je hebt nu een driehoek.

Stap 10: We gaan nu de hoeken weergeven. Vind de optie Hoek, en selecteer deze.



Stap 11: Omdat GeoGebra soms tussen twee lijnen de stompe hoek geeft, gaan wij aan de slag met de punten zelf. Als je de functie Hoek geselecteerd heb, klik dan achtereenvolgens op Punt B, Punt A en punt C. LET OP! Doe geen andere volgorde, anders geeft hij de stompe hoek weer.

Stap 12: Doe nu hetzelfde voor achtereenvolgens punt C, B, A. En doe dit vervolgens voor punt A, C, B.

Stap 13: Je ziet nu $\alpha=...$, $\beta=...$, en $\gamma=...$ staan. Als je de getalnetjes niet kunt lezen, verplaats deze dan met de Verplaats pijl . Tel nu de getallen bij elkaar op en schrijf je berekeningen op.

Stap 14: Met de Verplaats pijl  verplaats je punt C nu een stukje. Je ziet de groene getallen veranderen. Tel deze getallen nogmaals op.

Stap 15: Verplaats  nu punt B een stukje en tel de getallen nogmaals op. Doe nu hetzelfde voor punt A, en tel ze weer op.

Valt je iets op? Bespreek dit met een paar klasgenoten en schrijf je bevindingen op.

Doe de volgende onderstreepte stappen (die in het rood) alleen als je leraar daar toestemming voor geeft. Ga anders door naar Stap 26.

Stap 16: We gaan nu nogmaals een lijn tekenen, ditmaal door punt C. We willen dat deze lijn evenwijdig is met de lijn die door de punten A en B loopt.

Zoek in het lijstje van de Loodlijn naar de Evenwijdige rechte  en klik achtereenvolgens op de lijn die door punt A en B loopt, en dan op punt C. Als het niet lukt kijk dan even hoe je klasgenoten dit gedaan hebben.

Stap 17: Om met de nieuwe lijn weer wat hoeken weer te geven hebben we ook nieuwe punten nodig. We willen echter dat deze punten op de nieuwe lijn liggen. We doen dus het tegenovergestelde van Stap 6.

Zoek nu in het lijstje van Nieuw punt naar Punt op object  en zet een punt op de lijn die door C loopt, eerst links van punt C (dit wordt punt D), en daarna rechts van punt C (dit wordt punt E).

Onthoud dat, net als bij Stap 6 de lijn oplicht. Het nieuwe punt wordt dan “gepakt” door de lijn en licht er dan ook op.

Stap 18: We kunnen nu weer twee nieuwe hoeken die om punt C heen liggen aangeven zoals we eerder hebben gedaan bij Stap 10 en Stap 11 door de nieuwe punten te gebruiken. Welke punten moeten we voor de scherpe hoek links van C hebben? En welke voor de scherpe hoek rechts van C? Kijk nog even terug naar Stap 6 als je een foutje hebt gemaakt en iets ongedaan wilt maken.

Stap 19: Als je nu hoek δ met hoek α vergelijkt, en datzelfde doet met hoek ϵ en hoek β , wat valt dan op? Wat gebeurt er met deze hoeken als je punt A, punt B of punt C versleept? Bespreek dit met je klasgenoten.

Kunnen jullie een Z figuur ontdekken in de getekende lijnen?

Stap 20: We gaan nu nog twee lijnen tekenen. We gaan de lijn van punt A naar punt C, en de lijn van punt B naar punt C verlengen.

Vind in het lijstje van de lijnen de Halfrechte door twee punten  en klik vervolgens op punt A en dan punt C. Doe daarna hetzelfde voor punt B en punt C.

Stap 21: We gaan weer, net als bij Stap 17 twee punten zetten op deze nieuwe lijnen. Punt F komt linksboven punt C, en punt G komt rechtsboven punt C.

Stap 22: Vul nu de overige hoeken in zoals je al hebt gedaan bij Stap 10, Stap 11, en Stap 18.

Stap 23: Bereken het totaal van alle hoeken om punt C.

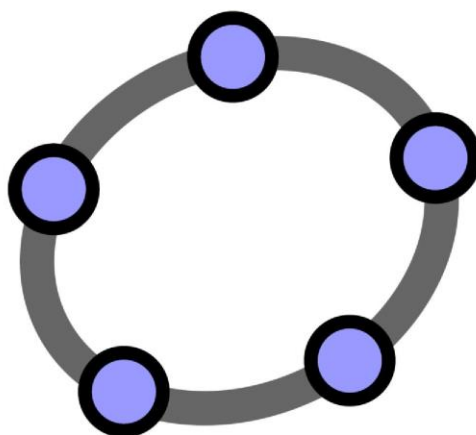
Stap 24: Schrijf op welke hoeken allemaal hetzelfde zijn.

Stap 25: Kun je, door bepaalde lijnen te gebruiken, een F-vormig figuur terugvinden? Wat valt je op aan de hoeken die je hier voor nodig hebt? Bespreek dit ook met je klasgenoten en schrijf op tot welke bevindingen jullie gekomen zijn.

Stap 26: Als alle stappen doorlopen zijn laat dan je leraar je figuur en je berekeningen controleren. Als hij of zij het heeft goed gekeurd sla dan je werk op met de naam die je hebt gekregen van je leraar, en sluit GeoGebra af.

Daarna mag je verder met Opdracht 2.

GeoGebra



Praktische opdracht

Het maken van een Gelijkbenige Driehoek

HAVO en VWO 1

Auteur: Arnaud Jasperse

Opdracht 1

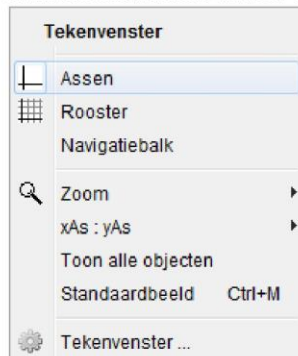
(Download en installeer eerst GeoGebra Klassiek 5 of 6 hier: <https://www.geogebra.org/download>, met iets anders gaat de opdracht niet goed)

We gaan een gelijkbenige driehoek tekenen.

Stap 1: Start GeoGebra op. Als er gevraagd wordt om een update te installeren doe dit dan niet.

Stap 2: Maximaliseer het scherm voor het beste overzicht, en zet hem op de taal Dutch (bij Options).

Stap 3: Rechtsklik met je muis op het rechter veld (dit heet het Tekenvenster) met de assenstelsels en zet de assenstelsels uit door op het woord Assen te klikken (zie plaatje hieronder).



Stap 4: De functie van je muis is nu om getekende dingen te Verplaatsen.

Om dit te veranderen moet je een andere functie in de taakbalk (de rij met alle plaatjes) selecteren.

We selecteren nu de functie Nieuw punt  A

Stap 5: Zet nu twee punten in het Tekenvenster naast elkaar met een stukje er tussen. Je ziet dat deze punten A en B heten. GeoGebra noemt automatisch elk punt anders.

Stap 6: We gaan nu een lijn zetten door deze punten heen. Deze functie heet Rechte door twee punten. 

Zoals je ziet "pakt" het punt je cursor als je in de buurt komt. Het licht op met een lichtblauwe rand. Als je klikt wanneer een voorwerp op deze manier is opgelicht liggen de objecten op exact dezelfde plaats. In dit geval gaat je lijn (als je hem al gezet hebt) precies door deze punten heen.

LET OP! Als er iets fout gaat kan je een stap terug doen door via Bewerken iets Ongedaan te maken.



Stap 7: Je hebt nu een lijn die door punt A en punt B loopt, maar ook een stuk verder. We gaan nu bij punt A een hoek maken. Voor deze optie gebruiken een functie nodig met de naam "Hoek met

gegeven grootte" . Deze vind je bij Hoek .

Stap 8: Klik nu achtereenvolgens op Punt B, en dan op Punt A (zo tekenen we $\angle A$). Er opent zich dit scherm:



We maken de hoek tegenwijzersin.

Het aantal graden dat deze hoek moet zijn is **40 + de laatste twee cijfers van je leerling nummer**.

Is je leerling nummer 10777? Dan is het aantal graden 40 + 77, en dus 117 graden.

Even checken: Nu heb je een lijn met Punt A en Punt B er op, een hoek bij Punt A, en ergens ligt punt B' boven de lijn. Als je deze niet kunt zien moet je even uitzoomen of het venster naar beneden

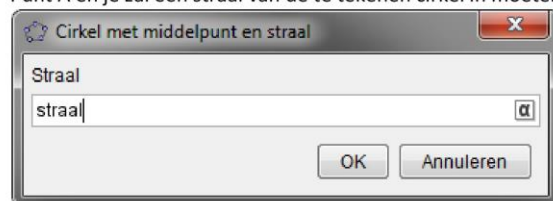
slepen .

Stap 9: Zet nu een halfrechte  van punt A naar punt B'.

Stap 10: $\angle A$ is de tophoek. We gaan nu twee benen tekenen die allebei even lang zijn. Om te zorgen dat dit ook zo is gebruiken we normaal gesproken een passer. In GeoGebra gebruiken we de functie

genaamd "Cirkel met middelpunt en straal" .

Stap 11: Aangezien $\angle A$ de tophoek is moeten punt C en D daar even ver vandaan liggen. Klik dus op Punt A en je zal een straal van de te tekenen cirkel in moeten vullen.



De lengte van de twee benen moet gelijk zijn aan **5 + het laatste cijfer van je leerling nummer**.

Is je leerling nummer 10777? Dan is de lengte van AD en AC gelijk aan 5 + 7, en dus gelijk aan 12.

Weer even checken: Je hebt als het goed is nu twee lijnen, drie punten, een hoek en een cirkel staan. Als dit niet het geval is heb je ergens een foutje gemaakt.

Stap 12: We zullen nu de Snijpunten  van de cirkel en de twee benen van de gelijkbenige driehoek moeten aangeven. Als je de functie geselecteerd hebt tekent GeoGebra automatisch een snijpunt van de objecten die "oplichten" (net als bij stap 6). Deze zullen automatisch C en D en E worden genoemd. Om over na te denken; waarom zijn er drie snijpunten?

Stap 13: Onze hoek bij A staat nu ingesloten door onze twee benen, en deze benen lopen naar de andere twee hoeken van de driehoek. Teken een lijnstuk om de laatste twee hoeken te verbinden.

Bijna klaar. We moeten de andere hoeken er nog inzetten, en de boel organiseren en opruimen.

Stap 15: Zet nu de hoeken er op de goede manier in bij de overige hoeken van onze gelijkbenige

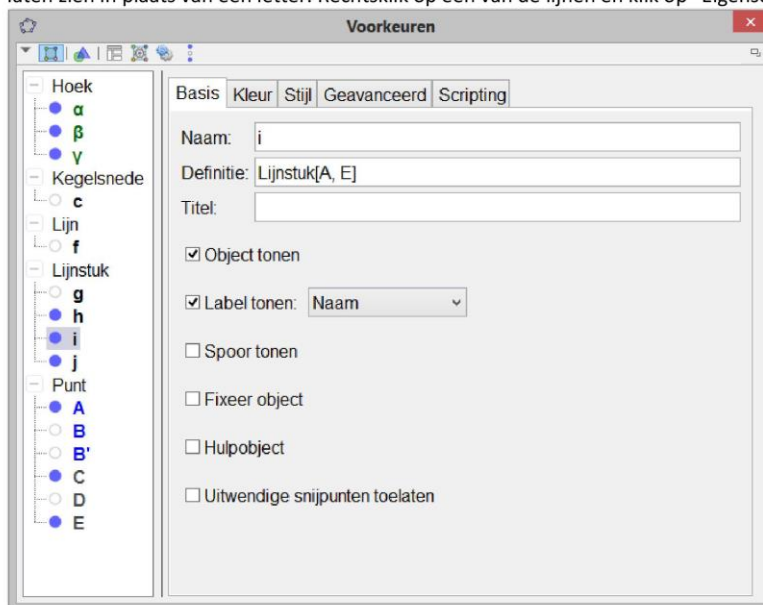
driehoek . Denk aan de volgorde van het aanklikken van de Punten. (Om te controleren; tel alle drie de hoeken bij elkaar op)

Stap 16: Wanneer we met onze aanwijzer en verplaatser  rechtsklikken op de lijnen, cirkels en hoeken kunnen we deze verbergen door "Object tonen" uit te zetten. Doe dit achtereenvolgens voor de cirkel, het lijnstuk tussen Punt A en Punt B', Punt B, Punt B', het Punt want niet onderdeel is van de driehoek, en de lijn door punt A en Punt B.

Even checken: Je hebt nu alleen de drie punten, een lijnstuk, en drie hoeken staan.

Stap 17: Teken nu de missende lijnstukken. Deze zullen de naam "i" en "j" hebben gekregen.

Stap 18: We willen dat onze twee nieuwe lijnstukken streepjes gaan krijgen en dat ze de waarde laten zien in plaats van een letter. Rechtsklik op een van de lijnen en klik op "Eigenschappen".



Verander bij "Label tonen" de "Naam" naar "Waarde". Doe dit bij **alle** lijnen van de driehoek. Klaar? Door op het rode kruisje te klikken ga je weer terug.

Stap 20: Ook bij Eigenschappen staat het woord “Stijl”. Zoek daar “Markering” op en zorg dat de zijden van de driehoek die even lang zijn (dit zijn ze dus niet allemaal) nu allebei twee streepjes hebben.

Stap 21: We gaan nu de kleur van de gelijke hoeken veranderen. Je ziet in het Algebravenster als het goed is onder Hoeken $\beta=...$ en $\gamma=...$. Selecteer deze allebei door eerst de ene hoek aan te klikken, en dan terwijl de Control toets ingedrukt wordt gehouden de andere aan te klikken.

Wederom rechtsklikken wij en selecteren we Eigenschappen, en daarna kiezen we “Kleur”. Selecteer rood.

De laatste stap: Onze gelijkbenige driehoek is nu klaar. We moeten deze nu opslaan en sturen aan onze docent. Sla je GeoGebra bestand met de volgende naam op:

opdracht1-achternaam-leerlingnummer.ggb

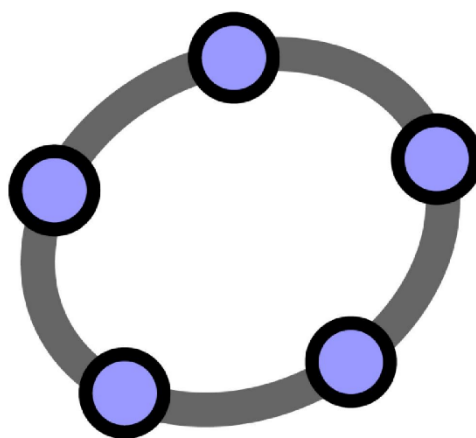
Voorbeeld:

opdracht1-Jasperse-12345.ggb

Deze kan nu in Magister worden ingeleverd in de map “GeoGebra Inleveropdracht 1” bij Opdrachten. Lukt dit niet, dan mag deze ook gemaild worden via Magister als Bijlage. Als je dit doet, stuur dan gelijk de tweede opdracht mee.

Succes!

GeoGebra



Praktische opdracht

Het Reconstrueren van een Opgave

HAVO en VWO 1

Auteur: Arnaud Jasperse

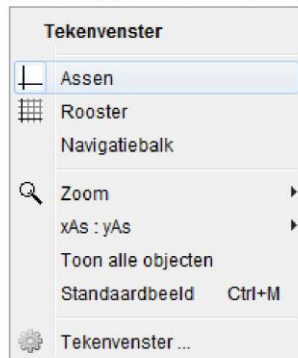
Opdracht 2

We gaan van een gemaakte opgave het bijbehorende plaatje reconstrueren.

Stap 1: Start GeoGebra op. Als er gevraagd wordt om een update te installeren doe dit dan niet.

Stap 2: Maximaliseer het scherm voor het beste overzicht, en zet hem op de taal Dutch (bij Options).

Stap 3: Rechtsklik met je muis op het rechter veld (dit heet het Tekenvenster) met de assenstelsels en zet de assenstelsels uit door op het woord Assen te klikken (zie plaatje hieronder).



Je zult voor deze opdracht al bekend moeten zijn met de manier waarop in GeoGebra hoeken, lijnen en de verschillende soorten driehoeken getekend worden. Ook heb je in hoofdstuk 3 geleerd hoe je een opgave moet oplossen, en de manier waarop je dit moet opschrijven.

Je krijgt nu de opgave zonder plaatje, maar met de uitgeschreven oplossing. Je zal in GeoGebra het bijbehorende plaatje moeten tekenen. Je mag hierbij de letters bij de hoeken weg laten (A volstaat, A_1 is niet nodig).

Hieronder staat een link die voor jou leerlingnummer de opdracht genereert. Plak deze in je browser.

<https://www.geogebra.org/m/XCGxP8Gy>

Hier moet je je leerlingnummer invoeren, en dan komt er de voor jou te maken opdracht uit.

Maak een screenshot zodat je deze altijd bij de hand hebt, en niet per ongeluk een verkeerde maakt.

TIP: Teken de opgave eerst op papier zodat je weet wat je in GeoGebra gaat tekenen. Houd ook je boek er naast zodat je kan zien hoe het hoort. Vergeet niet op te ruimen en te organiseren.

Wanneer je klaar bent sla je het GeoGebra bestand met de volgende naam op:

opdracht2-achternaam-leerlingnummer.ggb

Voorbeeld:

opdracht2-Jasperse-12345.ggb

Deze kan nu in Magister worden ingeleverd in de map "GeoGebra Inleveropdracht 2" bij Opdrachten.

Lukt dit niet, dan mag deze ook gemaild worden via Magister als Bijlage. Als je dit doet, stuur dan gelijk de eerste opdracht mee.

Succes!

BIBLIOGRAFIE

- Ballering, F. (2011, september). Wiskundtaal. *Euclides*, p. 47.
- Donk, C. v., & Lanen, B. v. (2015). *Praktijkonderzoek in de school*. Bussum: Uitgeverij Coutinho.
- Drijvers, P., & Kop, P. (2008). Vergelijkingen vergelijken. In *Handboek vakdidactiek wiskunde*.
- Dweck, C. (2008). Mindsets and Math/Science Achievement.
- Faarts, J., Goris, T., Konings, T., Monquil, A., & Koelemeijer, G. S. (2012). *Algebra voor de Lerarenopleiding*. Utrecht: APS.
- Faes, T., Goris, T., Konings, T., Krabbedam, H., Monquil, A., & Staal, H. (2001). *Het leren van Wiskunde*. Utrecht: Algemeen Pedagogisch Studiecentrum.
- Geerts, W., & van Kralingen, R. (2012). *Handboek voor Leraren*. Bussum: Uitgeverij Coutinho.
- Hajer, M., & Meestringa, T. (2009). *Handboek Taalgericht Vakonderwijs*. Bussum: Coutinho.
- Het PO-VO Netwerk in Alkmaar. (2015, oktober 27). *Stappenplan voor probleemoplossend handelen bij rekenen. Handreiking*. Opgehaald van School aan Zet:
http://www.schoolaanzet.nl/uploads/tx_sazcontent/Stappenplan_voor_probleemoplossend_handelen_bij_rekenen-0.2_04.pdf
- Keijzer, R., & van Galen, F. (2014). De kunst van het weglaten. *Volgens Bartjens*, 34(1), pp. 32-35.
- Krueger, R. A. (2002). *Designing and Conducting Focus Group Interviews*. St. Paul.
- Kwakernaak, E. (2007, maart). Doeltaal als voertaal, een kwaliteitskenmerk. *Levende Talen magazine*, pp. 12-16.
- Muller, D. A. (2015, April 27). *Learned Helplessness*. Opgehaald van Youtube:
<https://www.youtube.com/watch?v=YMPzDiraNNa>
- Muller, D. A. (2015, December 21). *Self Efficacy*. Opgehaald van Youtube:
https://www.youtube.com/watch?v=4hRbwJp_szQ
- Muller, T., & De Boer, M. (2012). *Classroom discourse analysis of student use of language scaffolding during tasks*. Palgrave Macmillan.
- Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek. (2015, Oktober 27). *Wiskundige DenkActiviteiten in Praktijk*. Opgehaald van Leraar24: <https://www.leraar24.nl/wiskundige-denkactiviteiten-in-praktijk/>
- Nelis, H., & van Sark, Y. (2014). *Motivatie Binnenstebuiten*. Kosmos Uitgevers.
- SLO. (2015, oktober 12). *Leerling- en Docentenquêtes*. Opgehaald van Nationaal Expertisecentrum Leerplanontwikkeling: http://www.cursuscurriculumontwerp.slo.nl/toolkit/Leerlingen-_en_docentenqu__tes.docx/
- van den Bogaart, T., & Konings, T. (2015). *Voorbereiden en ontwikkelen van Wiskundeonderwijs voor de Lerarenopleiding*. Utrecht: Algemeen Pedagogisch Studiecentrum.
- van der Leeuw, B., & Meestringa, T. (2014). *Genres in schoolvakken - taalgerichte didactiek in het voortgezet onderwijs*. Bussum: Coutinho.

- van Dijk, G., Hajer, M., Scharten, R., & de Vos, B. (2013). *Werken aan Vaktaal*. Opgehaald van Taalgericht Vakonderwijs:
http://www.taalgerichtvakonderwijs.nl/producten/00005/00043/Exacte_vakken_web.pdf/
- van Eerde, H. (2009). Rekenen-wiskunde en taal: een didactisch duo. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 19-32.
- van Streun, A. (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten*. Opgehaald van SLO - Nationaal Expertisecentrum Leerplanontwikkeling: <http://www.slo.nl/downloads/2014/onderwijzen-en-toetsen-van-wiskundige-denkactiviteiten.pdf>
- Visser, J. (2014, april 11). *Geef leerlingen les in nadenken*. Opgehaald van De Correspondent:
<https://decorrespondent.nl/1008/geef-leerlingen-les-in-nadenken/80088624-f71076eb>
- Vroom, V. H. (1964). *Work and Motivation*. New York: Wiley.
- Vygotski, L. (1978). *Mind in Society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.